

Développement : Densité des polynômes orthogonaux

Leçons : 201, 202, 207, 234, 239.

Théorème. Soient I intervalle de \mathbb{R} , $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction de poids, ie telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$.

On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$. On note $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la famille libre $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^2(I, \rho dx)$. Alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho dx)$.

Démonstration.

Étape 1 : Si $f \in L^2(I, \rho dx)$, alors $f \rho \mathbf{1}_I \in L^1(\mathbb{R})$.

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}, (1-t)^2 \geq 0$ d'où $t \leq \frac{1}{2}(1+t^2)$. Alors, pour tout $x \in I$, $|f(x)|\rho(x) \leq \frac{1}{2}(\rho(x) + f(x)^2\rho(x))$, et comme ρ et $f^2\rho$ sont intégrables sur I , $\varphi := f \rho \mathbf{1}_I \in L^1(\mathbb{R})$.

Étape 2 : Prolongement holomorphe de $\widehat{\varphi}$.

Comme $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ est bien définie. On pose $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |\Im(z)| < \frac{\alpha}{2}\}$.

On pose également pour $z \in \mathbb{C}, x \in I, g(z, x) = e^{-izx} f(x) \rho(x)$.

On a, pour $z \in B_\alpha, \int_I |g(z, x)| dx \leq \int_I e^{\alpha|x|/2} |f(x)| \rho(x) dx \leq \left(\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_I |f(x)|^2 \rho(x) dx \right)^{1/2} < +\infty$, en appliquant Cauchy-Schwarz à l'intégrale sous la mesure ρdx . On pose, pour tout $z \in B_\alpha$,

$F(z) = \int_I g(z, x) dx = \int_I e^{-izx} f(x) \rho(x) dx$. On a :

- $\forall z \in B_\alpha, g(z, \cdot)$ est mesurable.
- $\forall x \in I, g(\cdot, x)$ est holomorphe.
- $\forall z \in B_\alpha, |g(z, x)| \leq e^{\alpha|x|/2} |f(x)| \rho(x)$ qui est intégrable d'après ce qui précède.

Ainsi, le théorème d'holomorphie des intégrales à paramètre donne que F est holomorphe sur B_α , et coïncide avec $\widehat{\varphi}$ sur \mathbb{R} .

Étape 3 : Conclusion.

On pose, pour tout $x \in I, g_n(x) = x^n$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}, \langle f, g_n \rangle = \int_I f(x) g_n(x) \rho(x) dx = 0$. On a, pour

tout $z \in B_\alpha, F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x) \rho(x) dx$ d'où $F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x) \rho(x) dx = (-i)^n \langle f, g_n \rangle = 0$.

Par unicité du développement en série entière des fonctions holomorphes, $F = 0$ sur un voisinage de 0, et même sur B_α entier par principe du prolongement analytique (B_α étant connexe). Il s'ensuit que $\widehat{\varphi} = 0$, d'où comme $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, par injectivité de la transformée de Fourier on a $\varphi = 0$. Et comme $\forall x \in I, \rho(x) > 0$, on a $f(x) = 0$ sur I . Ainsi $f = 0$, c'est-à-dire que $(\mathbb{R}[X])^\perp = \{0\}$ et $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $L^2(I, \rho dx)$. Mais comme $\mathbb{R}[X] = \text{vect}(P_n, n \in \mathbb{N})$, on en déduit que la famille orthonormée $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale, donc une base hilbertienne.

Étape 4 : Contre-exemple lorsque la fonction de poids ne convient pas.

On pose, pour tout $x \in I = \mathbb{R}_+^*, \rho(x) = x^{-\ln(x)}$. C'est une fonction de poids : en effet, $\rho > 0$ sur I et pour tout $n \in \mathbb{N}, x^n \rho(x) = o(1/x^2)$ donc $\int_I x^n \rho(x) dx < +\infty$. On pose, pour tout $x \in I, f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle f, g_n \rangle &= \int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi \ln(x)) x^{-\ln(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y) e^{-y^2} dy \quad \text{en posant } y = \ln(x) \\ &= e^{(n+1)^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y - \frac{n+1}{2})^2} \sin(2\pi y) dy \\ &= (-1)^{n+1} e^{(n+1)^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi t) e^{-t^2} dt \quad \text{en posant } t = y - \frac{n+1}{2} \\ &= 0 \quad \text{car } t \mapsto \sin(2\pi t) e^{-t^2} \text{ est impaire.} \end{aligned}$$

Mais $f \neq 0$, donc $(g_n)_n$ n'est pas totale dans $L^2(I, \rho dx)$. □

Références

V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K, pp. 112 et 140.

Notes personnelles

Le contre-exemple a l'air un peu "parachuté" dans la leçon 207, mais c'est trop court sans lui...