

Développement : Méthode de Newton pour les polynômes

Leçons : 144, 218, 226, 228, 229, 232.

Théorème. Soit $P(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r}$ fonction polynomiale réelle, avec $a_1 < \cdots < a_r$ et $\forall i, m_i \geq 1$.

Soit $x_0 > a_r$, et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$.

Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers a_r , et on peut estimer la rapidité de convergence :

- Si $m_r = 1$, alors $\forall \varepsilon > 0, |x_n - a_r| = o(\varepsilon^n)$.
- Si $m_r \geq 2$, alors $\exists c > 0, |x_n - a_r| \sim c \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$.

Démonstration.

Étape 1 : Convergence de la suite.

D'après le théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celles de P , ce qui prouve que $P'(x)$ ne s'annule pas tant que $x > a_r$. Ainsi, si $x_n > a_r$, x_{n+1} est bien définie. On pose $f(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$, définie sur $]a_r, +\infty[$ avec le prolongement continu $f(a_r) = a_r$: en effet, par dérivée logarithmique des polynômes, $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{x - a_i} \xrightarrow{x \rightarrow a_r} +\infty$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a_r} a_r$.

f dérivable sur $]a_r, +\infty[$ et $f'(x) = 1 - \frac{P'(x)^2 - P(x)P''(x)}{P'(x)^2} = \frac{P(x)P''(x)}{P'(x)^2}$.

D'après le théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' sont dans $[a_1, a_r]$, et de même pour P'' . Comme P a un coefficient dominant strictement positif, P, P', P'' sont strictement positifs sur $]a_r, +\infty[$, ainsi $f' > 0$ et f est strictement croissante. On a alors, si $x_n > a_r$, $a_r = f(a_r) < f(x_n) = x_{n+1}$, ce qui prouve par récurrence $\forall n, x_n > a_r$: la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

De plus, $x_{n+1} = x_n - \left(\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{x_n - a_i}\right)^{-1} < x_n$. Ainsi $(x_n)_n$ décroissante minorée par a_r , donc elle converge vers un point fixe de x , i.e. vers une racine de P , donc nécessairement vers a_r .

Étape 2 : Calcul de $f'(a_r)$.

On a $\forall x > a_r, \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{x - a_i}$, donc en dérivant, $\frac{P(x)P''(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} = -\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{(x - a_i)^2}$, et ensuite

$\frac{P''(x)}{P(x)} = \frac{P'(x)^2}{P(x)^2} - \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{(x - a_i)^2}$. D'où

$f'(x) = \frac{P(x)P''(x)}{P'(x)^2} = \frac{P''(x)}{P'(x)} \frac{P(x)}{P'(x)^2} = \left(\frac{P'(x)^2}{P(x)^2} - \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{(x - a_i)^2}\right) \frac{P(x)}{P'(x)^2} = 1 - \left(\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{(x - a_i)^2}\right) \left(\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{x - a_i}\right)^{-2}$.

Or $\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{(x - a_i)^2} = \frac{1}{(x - a_r)^2} \left(\sum_{i=1}^{r-1} \frac{m_i(x - a_r)^2}{(x - a_i)^2} + m_r\right) \underset{x \rightarrow a_r}{\sim} \frac{m_r}{(x - a_r)^2}$.

De même, $\left(\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{x - a_i}\right)^2 = \frac{1}{(x - a_r)^2} \left(\sum_{i=1}^{r-1} \frac{m_i(x - a_r)}{x - a_i} + m_r\right) \underset{x \rightarrow a_r}{\sim} \frac{m_r^2}{(x - a_r)^2}$. Donc $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a_r} 1 - \frac{1}{m_r}$.

Étape 3 : Rapidité de convergence pour $m_r = 1$.

D'après Taylor-Lagrange à l'ordre 1, il existe $y_n \in]a_r, x_n[$ tel que $x_{n+1} - a_r = f(x_n) - f(a_r) = f'(y_n)(x_n - a_r)$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme $x_n \rightarrow a_r$, par encadrement $y_n \rightarrow a_r$ donc il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0, f'(y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi $|x_n - a_r| = (x_n - a_r) < (\varepsilon/2)^{n-n_0} (x_{n_0} - a_r) = O((\varepsilon/2)^n)$ donc $|x_n - a_r| = o(\varepsilon^n)$.

Étape 4 : Rapidité de convergence pour $m_r \geq 2$.

Comme précédemment, on a $f'(a_r) = 1 - \frac{1}{m_r}$. D'après Taylor-Lagrange à l'ordre 1, il existe $y_n \in]a_r, x_n[$ tel que $x_{n+1} - a_r = f'(y_n)(x_n - a_r)$, d'où $\ln(x_{n+1} - a_r) - \ln(x_n - a_r) = \ln(f'(y_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(f'(a_r)) = \ln(1 - \frac{1}{m_r})$.

Par Cesàro, $\frac{\ln(x_n - a_r) - \ln(x_0 - a_r)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(1 - \frac{1}{m_r})$ donc $\ln(x_n - a_r) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(1 - \frac{1}{m_r})$; en particulier,

pour $d \in]1 - \frac{1}{m_r}, 1[$, $|x_n - a_r| = O(d^n)$. D'après Taylor-Lagrange à l'ordre 2, il existe $z_n \in]a_r, x_n[$ tel que $x_{n+1} - a_r = f'(a_r)(x_n - a_r) + \frac{f''(z_n)}{2}(x_n - a_r)^2$, ainsi $\varepsilon_n := \frac{x_{n+1} - a_r}{f'(a_r)(x_n - a_r)} - 1 = O(x_n - a_r) = O(d^n)$.

Comme $\ln(1 + \varepsilon_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \varepsilon_n$, on a $\ln(1 + \varepsilon_n) = O(d^n)$.

Mais par ailleurs, $\ln(1 + \varepsilon_n) = \ln(x_{n+1} - a_r) - \ln(x_n - a_r) - \ln(f'(a_r))$: ainsi la série ayant ce terme général converge, donc $\ln(x_n - a_r) - n \ln(f'(a_r))$ converge vers un réel λ , et $|x_n - a_r| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^\lambda f'(a_r)^n = e^\lambda \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$. \square

Compléments

Détails sur un calcul asymptotique

Si $\ln(x_n - a_r) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(1 - \frac{1}{m_r})$, alors pour $d \in]1 - \frac{1}{m_r}, 1[$, $|x_n - a_r| = O(d^n)$.

En effet, on a $\ln(x_n - a_r) = \varepsilon_n n \ln(1 - \frac{1}{m_r})$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 1$. Donc si $d \in]1 - \frac{1}{m_r}, 1[$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $\frac{\varepsilon_n \ln(1 - \frac{1}{m_r})}{\ln(d)} \leq 1$, et donc $\ln(x_n - a_r) \leq n \ln(d)$ d'où $|x_n - a_r| \leq d^n$ pour $n \geq n_0$.

Théorème de Gauss-Lucas

Théorème. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celles de P .

On écrit $P = (X - a_1)^{m_1} \dots (X - a_r)^{m_r}$, où les a_i peuvent aussi être complexes. Soit z racine de P' .

— Si z aussi racine de P , le résultat est évident.

— Sinon, on a $\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{z - a_i} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i(\bar{z} - \bar{a}_i)}{|z - a_i|^2} = 0$ d'où $\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{|z - a_i|^2} \bar{z} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{|z - a_i|^2} \bar{a}_i$.

Ainsi \bar{z} est barycentre à coefficients positifs des \bar{a}_i , donc dans l'enveloppe convexe des $(\bar{a}_i)_i$. Or, pour un polynôme réel, l'ensemble des conjugués de ses racines est égal à l'ensemble de ses racines, d'où le résultat.

Diverses remarques

— On peut accélérer la convergence en divisant par le PGCD de P, P' afin d'avoir des racines simples.

— Pour choisir le point de départ x_0 , on remarque que si $P(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_k x^k$, on a

$$P(a) = 0 \Rightarrow |a|^n = \left| \sum_{k=0}^{n-1} p_k a^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |p_k| \cdot |a|^k \leq |a|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |p_k| \text{ si } |a| \geq 1.$$

Il suffit donc de prendre $x_0 > \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |p_k|\right)$.

— Enfin, pour trouver les autres racines, on applique la méthode à $\frac{P}{X - a_r}$, puis on répète jusqu'à trouver toutes les racines.

Références

A. Chambert-Loir, S. Fermigier, EXERCICES D'ANALYSE 2, Dunod.

Notes personnelles

Très long, on peut admettre l'équivalent de l'étape 2 par exemple pour aller plus vite.