

Développement : Marche aléatoire sur \mathbb{Z} et \mathbb{Z}^2

Leçons : 230, 249, 264.

Théorème (Pólya). *On considère la marche aléatoire simple $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $X_0 = 0$ et $X_{n+1} = X_n + \theta_{n+1}$, où les $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ variables aléatoires iid de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ (en dimension 1) ou $\{\pm e_1, \pm e_2\}$ (en dimension 2). Cette marche aléatoire est récurrente sur \mathbb{Z} et \mathbb{Z}^2 , c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 1$.*

Démonstration.

Étape 1 : En dimension 1, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \infty$.

On remarque d'abord que si n impair, alors $\mathbb{P}(X_n = 0) = 0$. Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{2n} = 0)$.

On a $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$. D'après la formule de Stirling, $n! \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$.

Ainsi $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, et donc $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = +\infty$.

Étape 2 : En dimension 2, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \infty$.

On note $X_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$, $\theta_n = (\theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)})$ et on définit les variables aléatoires $U_n = \theta_n^{(1)} + \theta_n^{(2)}$, $V_n = \theta_n^{(1)} - \theta_n^{(2)}$ (changement de coordonnées). Alors $\mathbb{P}(U_n = 1) = \mathbb{P}(\theta_n \in \{e_1, e_2\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(U_n = -1) = \mathbb{P}(\theta_n \in \{-e_1, -e_2\}) = \frac{1}{2}$.

De même pour V_n . De plus, si $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$, on a

$\mathbb{P}(U_n = \varepsilon_1, V_n = \varepsilon_2) = \mathbb{P}(\theta_n = (\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2})) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(U_n = \varepsilon_1) \mathbb{P}(V_n = \varepsilon_2)$. Ainsi U_n et V_n sont indépendantes.

D'où $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{2n} \theta_j^{(1)} = 0, \sum_{j=1}^{2n} \theta_j^{(2)} = 0\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{2n} U_j = 0, \sum_{j=1}^{2n} V_j = 0\right)$

$= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{2n} U_j = 0\right) \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{2n} V_j = 0\right) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi n}$ par ce qui précède. D'où $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \infty$.

Étape 3 : Temps d'atteinte de l'origine.

On définit par récurrence la suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme le temps d'atteinte de 0 pour la $n+1$ -ème fois, soit par $\tau_0 = 0$ et $\tau_{n+1} = \inf\{k \geq \tau_n, X_k = 0\}$ (avec la convention $\inf \emptyset = \infty$). On définit également le nombre de passages en 0, $N = \#\{n \in \mathbb{N}, X_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=0\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_n < \infty\}}$. Ainsi, pour tout n , $\mathbb{P}(N \geq n+1) = \mathbb{P}(\tau_n < \infty)$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\tau_n < \infty) = \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^n$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_{n+1} < \infty) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_{n+1} = i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_n = j, \tau_{n+1} = j+k) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\{\tau_n = j\} \cap \bigcap_{k'=1}^{k-1} \{\theta_{j+k'} \neq 0\} \cap \{\theta_{j+k} = 0\}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_n = j) \mathbb{P}\left(\bigcap_{k'=1}^{k-1} \{\theta_{j+k'} \neq 0\} \cap \{\theta_{j+k} = 0\}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_n = j) \mathbb{P}(\tau_1 = k) \\ &= \mathbb{P}(\tau_n < \infty) \mathbb{P}(\tau_1 < \infty). \end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc $\mathbb{P}(\tau_n < \infty) = \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^n$.

Étape 4 : Récurrence de la marche aléatoire.

$$\text{On a } \infty = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} E[\mathbb{1}_{\{X_n=0\}}] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=0\}}\right] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_n < \infty\}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E[\mathbb{1}_{\{\tau_n < \infty\}}]$$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_n < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^n$, les deux interversions série-intégrale étant permises par le théorème de

Beppo-Levi. Cela implique $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$, par suite pour tout n , $\mathbb{P}(N \geq n+1) = \mathbb{P}(\tau_n < \infty) = 1$, d'où $\mathbb{P}(N = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq n+1) = 1$. Le résultat est démontré. \square

Références

M. Benaïm, N. El Karoui, PROMENADE ALÉATOIRE, Éditions de l'École Polytechnique, p. 83.