

Développement : Étude de la loi Gamma

Leçons : 236, 239, 245, 261, 263.

Lemme. On pose, pour $a > 0$, $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$.

Cette intégrale est bien définie et vérifie $\forall a > 0, \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

Démonstration.

On pose $g(x) = x^{a-1} e^{-x}$. g définie, continue, strictement positive sur \mathbb{R}_+^* . En $+\infty$, on a $g(x) = o(\frac{1}{x^2})$ donc pour tout $A > 0$, $\int_A^{+\infty} g(x) dx$ est définie. Si $a \geq 1$, g définie et continue en 0 donc $\Gamma(a)$ est bien définie. Si $0 < a < 1$, on a $e^{-x} x^{a-1} \sim x^{a-1}$ au voisinage de 0, donc $\Gamma(a)$ est toujours bien définie.

On a alors $\Gamma(a+1) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{1/L}^L x^a e^{-x} dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} [-x^a e^{-x}]_{1/L}^L + \int_{1/L}^L a x^{a-1} e^{-x} dx = a\Gamma(a)$. □

Soient $a, \lambda > 0$. On considère une variable aléatoire X de densité donnée par $f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Étape 1 : C'est une densité de probabilité. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du = 1$ (on a fait le changement de variables $u = \lambda x$). Comme f est positive, c'est une densité de probabilité.

Étape 2 : Calcul de l'espérance.

On a $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^a e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda^{a+1}} = \frac{a}{\lambda}$.

Étape 3 : Calcul de la variance.

On a $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a+1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+2)}{\lambda^{a+2}} = \frac{a(a+1)}{\lambda^2}$.

D'où $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{a(a+1)}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}$.

Étape 4 : Transformée de Laplace.

Elle est donnée, lorsqu'elle est définie, par $L_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{(t-\lambda)x} dx$.

L'intégrande est toujours intégrable au voisinage de 0 si $a > 0$, et intégrable au voisinage de $+\infty$ ssi $t - \lambda < 0$. L_X est donc bien définie sur $] -\infty, \lambda[$, et alors en faisant le changement de variables $x = \frac{u}{\lambda-t}$, on a

$$L_X(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{(\lambda-t)^{a-1}} e^{-u} \frac{du}{\lambda-t} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t} \right)^a.$$

Étape 5 : Fonction caractéristique.

Elle est donnée par $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-(\lambda-it)x} dx$.

On pose $D = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) < \lambda\}$ et pour $z \in D$, $F(z) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{(z-\lambda)x} dx$. Montrons que F holomorphe sur

D : on pose $\varphi(x, z) = x^{a-1} e^{(z-\lambda)x}$. On a pour tout $z \in D$, $\varphi(\cdot, z)$ mesurable, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x, \cdot)$ holomorphe. Soit $\varepsilon > 0$, soit $z \in D$ tel que $\Re(z) < \lambda - \varepsilon$. Alors $|\varphi(x, z)| = x^{a-1} e^{(\Re(z)-\lambda)x} \leq e^{-\varepsilon x} x^{a-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$. On peut appliquer le théorème d'holomorphie des intégrales à paramètre : F est holomorphe sur D .

De plus, si $z \in D$, on a $\Re(\lambda-z) > 0$, on peut donc écrire $(\lambda-z)^a = e^{a \log(\lambda-z)}$ où \log est la détermination principale du logarithme. Ainsi, $G(z) := \left(\frac{\lambda}{\lambda-z} \right)^a$ prolonge L_X sur D . F et G coïncident sur $] -\infty, \lambda[$, donc par le théorème

des zéros isolés, $F = G$ sur D et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = F(it) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it} \right)^a$.

Références

M. Cottrell et al., EXERCICES DE PROBABILITÉS, Cassini, pp. 82 et 121.