

Développement : Lemme de Morse

Leçons : 171, 214, 215, 218.

Théorème. Soit U ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0 , soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^3 . On suppose $df_0 = 0$ et d^2f_0 forme quadratique non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ entre deux voisinages U, V de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(0) = 0$ et $\forall x \in U, f(x) = f(0) + \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$.

Démonstration.

Étape 1 : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe V voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\psi : V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\forall A \in V, A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$.

Soit $\phi \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto {}^tMA_0M \end{cases}$. ϕ est polynomiale donc différentiable. On a

$\phi(I_n + H) - \phi(I_n) = {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H$ et ${}^tHA_0H = O(\|H\|^2) = o(\|H\|)$ si on prend une norme d'algèbre. Donc $d\phi_{I_n}(H) = {}^tHA_0 + A_0H$. $\ker(d\phi_{I_n}) = \{H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), A_0H \in A_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}A_n(\mathbb{R})$.

On pose $F = A_0^{-1}S_n(\mathbb{R})$. On a $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = A_0^{-1}\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = (A_0^{-1}S_n(\mathbb{R})) \oplus (A_0^{-1}A_n(\mathbb{R})) = F \oplus \ker(d\phi_{I_n})$.

Posons $\psi = \phi|_F$, alors $d\psi_{I_n} = d\phi_{I_n}|_F$ et $F \cap \ker(d\phi_{I_n}) = \{0\}$ donc $d\psi_{I_n}$ est injective.

De plus, si $S \in S_n(\mathbb{R})$, $d\psi_{I_n}(\frac{1}{2}A_0^{-1}S) = S$, donc $d\psi_{I_n}$ est surjective, donc bijective. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage W de I_n dans F (que l'on peut supposer inclus dans $GL_n(\mathbb{R})$, celui-ci étant ouvert) tel que ψ soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de W sur $V := \psi(W)$. V voisinage ouvert de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\forall A \in V, \exists! M \in W$ tel que $A = {}^tMA_0M$, où $M = \psi^{-1}(A)$ fonction \mathcal{C}^1 de A .

Étape 2 : Preuve du théorème.

Formule de Taylor reste intégral à l'ordre 1 :

$$f(x) = f(0) + df_0(x) + \int_0^1 (1-t)d_{tx}^2f(x, x)dt \quad \text{avec } df_0(x) = 0.$$

On pose $Q(x) = \int_0^1 (1-t)d_{tx}^2f dt$ ce qui définit une matrice symétrique (théorème de Schwarz). De plus Q fonction \mathcal{C}^1 de x (car f est \mathcal{C}^3 , par dérivation d'une intégrale à paramètre). D'après l'étape 1, comme $Q(0) = \frac{1}{2}d^2f_0$ est inversible, il existe V voisinage de $Q(0)$ dans $S_n(\mathbb{R})$, et $\psi \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tel que, pour tout $A \in V, A = {}^t\psi(A)Q(0)\psi(A)$.

Comme Q continue, il existe V_0 voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $x \in V_0 \Rightarrow Q(x) \in V$. Alors, pour tout $x \in V_0, Q(x) = {}^t\psi(Q(x))Q(0)\psi(Q(x))$, d'où en posant $M(x) = \psi(Q(x))$, on a $Q(x) = {}^tM(x)Q(0)M(x)$, et $M(x)$ fonction \mathcal{C}^1 de x .

$Q(0)$ définit une forme quadratique de signature $(p, n-p)$ donc (loi d'inertie de Sylvester) il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(0) = {}^tAI_{p, n-p}A$. Alors $f(x) - f(0) = {}^t xQ(x)x = {}^t xM(x)Q(0)M(x)x = {}^t (AM(x)x)I_{p, n-p}(AM(x)x)$.

En posant $\phi(x) = AM(x)x$, on a $\varphi(0) = 0$ et $f(x) = f(0) + \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$.

Montrons que φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme : il est \mathcal{C}^1 car $M(x)$ est \mathcal{C}^1 .

On a $\varphi(h) - \varphi(0) = AM(h)h = AM(0)h + A(M(h) - M(0))h$ avec $M(h) - M(0) \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$

donc $A(M(h) - M(0))h = o(h)$ et $d\varphi_0 = AM(0) \in GL_n(\mathbb{R})$. Par le théorème d'inversion locale, φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme au voisinage de 0 . \square

Références

F. Rouvière, PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, Cassini, p. 344.

Notes personnelles

Attention au Rouvière, pas toujours très clair. Cette version est celle de Laura Gay, beaucoup plus précise à mon avis.