

## Développement : Ellipsoïde de John-Loewner

**Leçons** : 152, 171, 203, 219, 253.

**Théorème.** Soit  $K$  compact d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant  $K$ .

*Démonstration.*

On rappelle qu'un ellipsoïde centré en 0 est défini par une équation de la forme  $q(x) \leq 1$  où  $q$  forme quadratique définie positive. On notera  $Q$  (respectivement  $Q^+, Q^{++}$ ) l'espace des formes quadratiques (respectivement formes quadratiques positives, définies positives).

Étape 1 : Calcul du volume d'un ellipsoïde.

Soit  $q \in Q^{++}$ , calculons le volume  $V_q$  de l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_q$ .

D'après le théorème spectral, il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ .

Si  $S$  est une matrice symétrique définie positive représentant  $Q$ , ses valeurs propres sont  $a_1, \dots, a_n$ , son déterminant est donc  $\det(S) = a_1 \cdots a_n$  indépendamment de la base choisie, on le note  $D(q)$ .

On a alors  $V_q = \int_{a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \leq 1} dx_1 \cdots dx_n$ .

On pose le changement de variables  $x_i = \frac{t_i}{\sqrt{a_i}}$ . C'est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme, et son jacobien est donnée par

$J = \frac{1}{\sqrt{a_1 \cdots a_n}} = \frac{1}{\sqrt{D(q)}}$ . Le changement de variables donne alors  $V_q = \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} dx_1 \cdots dx_n = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$ ,

où  $V_0$  est le volume de la sphère unité (pour la norme euclidienne) de  $\mathbb{R}^n$  (qui vaut  $\pi^{n/2} \Gamma(n/2 + 1)^{-1}$ ).

On se ramène à montrer qu'il existe  $q \in Q^{++}$  telle que  $\forall x \in K, q(x) \leq 1$  et tel que  $D(q)$  soit maximal.

Étape 2 : Maximisation de  $D(q)$ .

On munit  $Q$  de la norme  $N(q) = \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$ . On considère  $\mathcal{A} = \{q \in Q^+, \forall x \in K, q(x) \leq 1\}$ . Montrons que  $\mathcal{A}$  compact convexe :

- $\mathcal{A}$  convexe : soient  $q, q' \in \mathcal{A}, \lambda \in [0, 1]$ . Si  $x \in \mathbb{R}^n, (1 - \lambda)q(x) + \lambda q'(x) \geq 0$  et  $(1 - \lambda)q + \lambda q'$  est positive. Et si  $x \in K, (1 - \lambda)q(x) + \lambda q'(x) \leq 1 - \lambda + \lambda = 1$ . Donc  $\mathcal{A}$  est convexe.
- $\mathcal{A}$  fermé : soit  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $q \in Q$ . Montrons que cela implique la convergence simple : soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . On a  $|q(x) - q_n(x)| \leq N(q - q_n) \|x\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Il s'ensuit en passant à la limite que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n, q(x) \geq 0$  et  $q(x) \leq 1$ , donc  $q \in \mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}$  est fermé.
- $\mathcal{A}$  borné : comme  $K$  d'intérieur non vide, il existe  $z \in K, r > 0$  tel que  $B(z, r) \subseteq K$ . Soit  $q \in \mathcal{A}$ .

Si  $\|x\| \leq r$ , alors  $z + x \in K$  donc  $q(z + x) \leq 1$ , et  $q(-z) = q(z) \leq 1$ . L'inégalité de Minkowski donne alors

$$\sqrt{q(x)} = \left( \sum_{i=1}^n (\sqrt{a_i} (x_i + z_i - z_i))^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n (\sqrt{a_i} (x_i + z_i))^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n (\sqrt{a_i} (-z_i))^2 \right)^{1/2} = \sqrt{q(x+z)} + \sqrt{q(z)} \leq 2.$$

Donc  $q(x) \leq 4$ . Maintenant, si  $\|x\| \leq 1$ , on a  $q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$ . Donc  $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$  et  $\mathcal{A}$  est borné.

Ainsi  $\mathcal{A}$  compact convexe. Montrons qu'il contient un élément de  $Q^{++}$ . Comme  $K$  compact, il est borné, donc il existe  $M > 0$  tel que  $\forall x \in K, \|x\| \leq M$ . Si on pose  $\hat{q}(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2}$ ,  $\hat{q}$  est définie positive (en particulier  $D(\hat{q}) > 0$ ), et vérifie  $\forall x \in K, \hat{q} \leq 1$  donc  $\hat{q} \in \mathcal{A}$ .

Comme  $\det$  est continue (car polynomiale) sur  $\mathcal{A}$  compact non vide, l'application  $D$  atteint son maximum sur  $\mathcal{A}$  en  $q_0$ . De plus,  $D(q_0) \geq D(\hat{q}) > 0$ , donc  $q_0$  définie positive. Il existe donc un ellipsoïde de volume minimal contenant  $K$ .

Étape 3 : Unicité

S'il existe  $q_1 \in \mathcal{A}$  tel que  $D(q_0) = D(q_1)$ , on note  $S_0, S_1$  les matrices de  $q_0, q_1$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On a par convexité de  $\mathcal{A}$ ,  $\frac{q_0 + q_1}{2} \in \mathcal{A}$ , et par concavité logarithmique du déterminant,

$$D\left(\frac{q_0 + q_1}{2}\right) = \det\left(\frac{S_0 + S_1}{2}\right) > \det(S_0)^{1/2} \det(S_1)^{1/2} = D(q_0). \quad \square$$

## Extensions

### Concavité logarithmique du déterminant

**Théorème.** Soient  $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ , soit  $\alpha \in [0, 1]$ . Alors  $\det((1 - \alpha)A + \alpha B) \geq \det(A)^{1-\alpha} \det(B)^\alpha$ , avec inégalité stricte si  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $A \neq B$ .

*Démonstration.* Par pseudo-réduction simultanée, il existe  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec les  $\lambda_i > 0$  tels que  $A = {}^t P P$ ,  $B = {}^t P D P$ . Alors  $\det(A)^{1-\alpha} \det(B)^\alpha = \det(P^2)^{1-\alpha} \det(P^2)^\alpha \det(D)^\alpha = \det(P)^2 \det(D)^\alpha$ .

Par ailleurs,  $\det((1 - \alpha)A + \alpha B) = \det(P^2) \det((1 - \alpha)I_n + \alpha D)$ . Montrons donc que  $\det((1 - \alpha)I_n + \alpha D) \geq \det(D)^\alpha$ , soit  $\prod_{i=1}^n (1 - \alpha + \alpha \lambda_i) \geq \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^\alpha$ . En prenant le logarithme,  $\sum_{i=1}^n \ln(1 - \alpha + \alpha \lambda_i) \geq \alpha \sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i)$ .

Or, par concavité du logarithme, on a pour tout  $i$ ,  $\alpha \ln(\lambda_i) = (1 - \alpha) \ln(1) + \alpha \ln(\lambda_i) \leq \ln((1 - \alpha)1 + \lambda(\lambda_i))$ .

En sommant ces inégalités, on obtient le résultat (et la stricte inégalité vient de la stricte concavité du logarithme).  $\square$

**Remarque.** Le fait qu'un ellipsoïde plein centré en 0 possède une équation de la forme  $q(x) \leq 1$  provient du fait que, dans une base adaptée, son équation est donnée par  $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1$ .

## Références

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS - ALGÈBRE 3, Cassini, p. 229.

### Notes personnelles

*Un très grand classique, mais quand même de bon niveau, alors pourquoi s'en priver... Jolie application aux sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$  dans Alessandri.*