

Développement : Méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel

Leçons : 158, 162, 226, 232, 233.

Définition. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ que l'on écrit $A = M - N$ avec M inversible. On dit que la méthode itérative associée à cette décomposition est convergente si, pour tout $b \in \mathbb{C}^n$, pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$, la suite définie par $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$ converge.

Théorème. Si la méthode converge, alors sa limite x est l'unique solution du système linéaire $Ax = b$.

Démonstration.

Par continuité du produit matriciel, on a en passant à la limite :

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow Ax = b. \quad \square$$

Théorème. La méthode converge, si et seulement si, $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Démonstration.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e_k = x_k - x$.

Alors $e_{k+1} = x_{k+1} - x = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b - M^{-1}Nx - M^{-1}b = (M^{-1}N)(x_k - x) = M^{-1}Ne_k$,

d'où $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$. Ainsi, la méthode converge si et seulement si $(M^{-1}N)^k e_0$ converge pour tout e_0 .

\Rightarrow : On pose $C = M^{-1}N$ et supposons $\rho(C) \geq 1$. Alors il existe λ valeur propre vérifiant $|\lambda| \geq 1$, et u un vecteur propre associé. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C^k u = \lambda^k u$ qui ne converge pas vers 0. Donc la méthode ne converge pas.

\Leftarrow : Supposons $\rho(C) < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(C) + \varepsilon < 1$. D'après le théorème de Householder, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ telle que $\|C\| \leq \rho(C) + \varepsilon < 1$. On a alors $\|C^k e_0\| \leq \|C^k\| \cdot \|e_0\| \leq \|C\|^k \cdot \|e_0\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, donc la méthode converge. \square

Théorème. Si $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$, alors $M^* + N$ est hermitienne. Si elle est de plus définie positive, alors la méthode itérative converge.

$M^* + N$ est hermitienne : $(M^* + N)^* = M + N^* = A + N + (M - A)^* = A + N + M^* - A^* = M^* + N$, car $A^* = A$. Donc $M^* + N$ hermitienne. On définit la norme euclidienne $|x|_A = \sqrt{\langle Ax, x \rangle}$, et on note $\|\cdot\|$ la norme matricielle subordonnée.

Par compacité de la sphère unité, il existe $v \in \mathbb{C}^n$, $|v|_A = 1$, tel que $\|M^{-1}N\|^2 = \sup_{|u|_A=1} |M^{-1}Nu|^2 = |M^{-1}Nv|_A^2$.

On pose $w = M^{-1}Av$. On a alors

$$\begin{aligned} |M^{-1}Nv|_A^2 &= \langle AM^{-1}Nv, M^{-1}Nv \rangle \\ &= \langle AM^{-1}(M - A)v, M^{-1}(M - A)v \rangle \\ &= \langle Av, v \rangle - \langle AM^{-1}Av, v \rangle - \langle Av, M^{-1}Av \rangle + \langle AM^{-1}Av, M^{-1}Av \rangle \\ &= 1 - \langle M^{-1}Av, MM^{-1}Av \rangle - \langle MM^{-1}Av, M^{-1}Av \rangle + \langle AM^{-1}Av, M^{-1}Av \rangle \\ &= 1 - \langle w, Mw \rangle - \langle Mw, w \rangle + \langle Aw, w \rangle \\ &= 1 - \langle w, Mw \rangle - \langle Nw, w \rangle \\ &= 1 - \langle (M^* + N)w, w \rangle \end{aligned}$$

Comme M, A inversibles, $w \neq 0$, et comme $M^* + N$ définie positive, on a $\langle (M^* + N)w, w \rangle > 0$, donc $\rho(M^{-1}N) \leq \|M^{-1}N\| < 1$ et la méthode converge.

Définition. On note D la partie diagonale de A , E sa partie triangulaire inférieure, F sa partie triangulaire supérieure. La méthode de Jacobi est associée à la décomposition $M = D, N = E + F$. La méthode de Gauss-Seidel est associée à la décomposition $M = D - E, N = F$.

Ainsi, si A est hermitienne définie positive, la méthode de Gauss-Seidel converge. Si de plus, $2D - A$ est définie positive, la méthode de Jacobi converge.

Références

G. Allaire, S.-M. Kaber, ALGÈBRE LINÉAIRE NUMÉRIQUE, Ellipses, p. 155.

Notes personnelles

Quasi incontournable pour la leçon 233, et c'est bien à connaître pour l'option B.