

Développement : Méthode de gradient à pas optimal

Leçons : 162, 219, 233, 253.

Lemme (Kantorovitch). *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, soient $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|x\|_2^4 \leq \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^2 \|x\|_2^4.$$

Démonstration.

Étape 1 : Reformulation du problème.

On diagonalise A en base orthonormée : $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tPDP$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors $A^{-1} = {}^tPD^{-1}P$ avec $D^{-1} = \text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n)$, $\langle Ax, x \rangle = \langle D(Px), Px \rangle$, $\langle A^{-1}x, x \rangle = \langle D^{-1}(Px), Px \rangle$. Par homogénéité, on suppose $\|x\|_2 = 1$. P étant orthogonale, on a $x \mapsto Px$ bijection de la sphère sur elle-même. Par changement de variables $y = Px$, on se ramène à prouver que pour tout $y \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$1 \leq \langle Dy, y \rangle \langle D^{-1}y, y \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^2.$$

Si $\lambda_1 = \lambda_n$, c'est vrai. Supposons $\lambda_1 < \lambda_n$.

Étape 2 : Preuve.

On considère $\theta : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto 1/x$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle M_k le point $(\lambda_k, 1/\lambda_k) = (\lambda_k, \theta(\lambda_k))$. Soit $y \in \mathbb{S}^{n-1}$, on appelle M le point d'abscisse $\mu := \langle Dy, y \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ et d'ordonnée $\langle D^{-1}y, y \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} y_i^2$. Ainsi M est barycentre des M_k à coefficients positifs $(y_i^2)_k$, il est dans le polygone de sommets M_1, \dots, M_n . Soient $M^* = (\mu, \theta(\mu))$, $M^\#$ le point de la droite $(M_1 M_n)$ d'abscisse μ .

Si on note z l'ordonnée de $M^\#$, on a $\begin{vmatrix} \lambda_n - \lambda_1 & \mu - \lambda_1 \\ \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_1} & z - \frac{1}{\lambda_1} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\mu - \lambda_1}{\lambda_n - \lambda_1} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_n} - \frac{\mu}{\lambda_1 \lambda_n}$. L'épigraphe de θ est convexe, donc l'ordonnée de M est supérieure à celle de M^* , ie $\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\lambda_i} \geq \frac{1}{\mu}$, et $\langle Dy, y \rangle \langle D^{-1}y, y \rangle \geq$

1. Et l'ordonnée de M est inférieure à celle de $M^\#$, soit $\langle D^{-1}y, y \rangle \leq z \Leftrightarrow \mu \langle D^{-1}y, y \rangle \leq \mu z = \frac{\mu(\lambda_1 + \lambda_n - \mu)}{\lambda_1 \lambda_n}$.

Or $u \mapsto \frac{u(\lambda_1 + \lambda_n - u)}{\lambda_1 \lambda_n}$ atteint son maximum pour $u = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_n)$, d'où $\mu z \leq \frac{1}{\lambda_1 \lambda_n} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2} \right)^2$, et il s'ensuit

$$\text{que } \langle Dy, y \rangle \langle D^{-1}y, y \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^2. \quad \square$$

Théorème. *On considère $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$. On considère la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$ où $t_k = \text{argmin}_{t \in \mathbb{R}} f(x_k - t \nabla f(x_k))$. Alors $(x_k)_k$ converge vers \bar{x} solution du système linéaire $Ax = b$, et $\|x_k - \bar{x}\| \leq \left(\frac{2(f(x_0) - f(\bar{x}))}{\lambda_n} \right)^{1/2} \left(\frac{\text{cond}_2(A) - 1}{\text{cond}_2(A) + 1} \right)^k$.*

Étape 1 : Diverses relations sur les itérés.

On pose $d_k = -\nabla f(x_k)$. On a $f(x_k + t d_k) = f(x_k) + t \langle Ax_k - b, d_k \rangle + \frac{t^2}{2} \langle Ad_k, d_k \rangle$ d'où si $d_k \neq 0$, le minimum est atteint en $t_k = \frac{-\langle Ax_k - b, d_k \rangle}{\langle Ad_k, d_k \rangle} = \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k \rangle}$. Il s'ensuit que $d_{k+1} = -(Ax_{k+1} - b) = -Ax_k + b - t_k Ad_k = d_k - t_k Ad_k$, $\langle d_{k+1}, d_k \rangle = \langle d_k, d_k \rangle - t_k \langle Ad_k, d_k \rangle = 0$.

On a aussi $f(x_k + t_k d_k) = f(x_k) + t_k \langle Ax_k - b, d_k \rangle + \frac{t_k^2}{2} \langle Ad_k, d_k \rangle = f(x_k) - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle} + \frac{1}{2} \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle}$
 $= f(x_k) - \frac{1}{2} \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle}$. D'où $f(x_{k+1}) - f(\bar{x}) = (f(x_k) - f(\bar{x})) \left(1 - \frac{\|d_k\|^4}{2(f(x_k) - f(\bar{x})) \langle Ad_k, d_k \rangle} \right)$.

Par ailleurs, on a $\langle A^{-1}d_k, d_k \rangle = \langle A^{-1}(Ax_k - b), Ax_k - b \rangle = \langle Ax_k, x_k \rangle - \langle b, x_k \rangle - \langle b, x_k \rangle + \langle A^{-1}b, b \rangle = 2(f(x_k) - f(\bar{x}))$

car $A^{-1}b = \bar{x}$ et $f(\bar{x}) = \frac{1}{2} \langle b, \bar{x} \rangle$.

$$\text{Ainsi } f(x_{k+1}) - f(\bar{x}) = (f(x_k) - f(\bar{x})) \left(1 - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle \langle A^{-1}d_k, d_k \rangle} \right).$$

Étape 2 : Vitesse de convergence.

On applique Kantorovitch : $\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle \langle A^{-1}d_k, d_k \rangle} \geq 4 \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^{-2} = 4 \frac{\lambda_1/\lambda_n}{(\lambda_1/\lambda_n + 1)^2}$ d'où

$$f(x_{k+1}) - f(\bar{x}) \leq (f(x_k) - f(\bar{x})) \left(1 - 4 \frac{\text{cond}_2(A)}{(\text{cond}_2(A) + 1)^2} \right) = (f(x_k) - f(\bar{x})) \left(\frac{\text{cond}_2(A) - 1}{\text{cond}_2(A) + 1} \right)^2.$$

Par récurrence, on tire $f(x_k) - f(\bar{x}) \leq (f(x_0) - f(\bar{x})) \left(\frac{\text{cond}_2(A) - 1}{\text{cond}_2(A) + 1} \right)^{2k}$.

Et on a $2(f(x_k) - f(\bar{x})) = \langle Ax_k, x_k \rangle - 2 \langle A\bar{x}, x_k \rangle - \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle + 2 \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle = \langle A(x_k - \bar{x}), x_k - \bar{x} \rangle$

$$\geq \lambda_n \|x_k - \bar{x}\|^2. \text{ D'où } \|x_k - \bar{x}\| \leq \left(\frac{2(f(x_0) - f(\bar{x}))}{\lambda_n} \right)^{1/2} \left(\frac{\text{cond}_2(A) - 1}{\text{cond}_2(A) + 1} \right)^k.$$

Références

J.-B. Hiriart-Urruty, OPTIMISATION ET ANALYSE CONVEXE, EDP Sciences, pp. 17 et 53.

Notes personnelles

Bof, calculatoire, trop court sans Kantorovitch, trop long avec.