

Développement : Générateurs du groupe linéaire

Leçons : 106, 108, 162.

Théorème. Soient $n \geq 2, K$ un corps commutatif. Pour $i \neq j \in [1, n]$ et $\lambda \neq 0, \alpha \neq 1 \in K$, on définit les matrices $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}, D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$ (appelées matrices de transvection et de dilatation). Les matrices de transvection engendrent $SL_n(K)$ et les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(K)$.

Démonstration.

Étape 1 : Opérations élémentaires.

Le produit par les matrices de transvection et de dilatation revient à faire les opérations élémentaires suivantes :

	À gauche	À droite
$T_{ij}(\lambda)$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$
$D_i(\alpha)$	$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$C_i \leftarrow \alpha C_i$

Remarquons que $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$ a pour effet (par produit à gauche) de remplacer L_i par L_j et L_j par $-L_i$.

Étape 2 : Pivot de Gauss.

Soit $A \in GL_n(K)$. Transformons-la en une matrice de dilatation à l'aide du pivot de Gauss, en n'utilisant que des transvections. Comme A est inversible, sa première colonne est non nulle. S'il existe $i \geq 2$ tel que $a_{i1} \neq 0$, on effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{a_{i1} - 1}{a_{i1}} L_i$ pour se ramener à un coefficient égal à 1 en position $(1, 1)$. Si $a_{i1} = 0$ pour tout $i \geq 2$, on remplace L_1 par L_2 et L_2 par $-L_1$ et on se ramène au cas précédent. En utilisant le coefficient $(1, 1)$ comme pivot, on annule tous les autres coefficients des premières ligne et colonne : ainsi il existe des matrices de transvection $M_1, \dots, M_p, N_1, \dots, N_q$ telles que

$$M_1 \cdots M_p A N_1 \cdots N_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

avec $A_1 \in GL_{n-1}(K)$. En répétant le processus, il existe des matrices de transvection $U_1, \dots, U_r, V_1, \dots, V_s$ telles que

$$U_r \cdots U_1 A V_1 \cdots V_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = \det(A)$. Les matrices de transvection sont de déterminant 1, le groupe qu'elles engendrent est donc inclus dans $SL_n(K)$. Comme l'inverse d'une matrice de transvection (resp. de dilatation) est toujours une matrice de transvection (resp. de dilatation), A s'écrit comme produit de matrices de transvection et de dilatation, ou seulement de transvections si $\det(A) = 1$. Réciproquement, comme les transvections sont de déterminant 1, elles engendrent un groupe inclus dans $SL_n(K)$. □

Corollaire. L'ensemble des matrices diagonalisables inversibles engendre $GL_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $M = T_{ij}(\lambda)$ une matrice de transvection. Soit $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$. Alors $M = D^{-1}(DM)$, DM est triangulaire avec la même diagonale que D : elle possède n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable. Ainsi M est produit de matrices diagonalisables, et par suite toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ l'est aussi. □

Corollaire. $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Soit $A \in SL_n(\mathbb{R})$. Il existe $X \subset [1, n] \setminus \{(i, i), 1 \leq i \leq n\}$ et une famille $(\lambda_{ij})_{i,j \in X}$ telle que $A = \prod_{(i,j) \in X} T_{ij}(\lambda_{ij})$.

Alors $\varphi : [0, 1] \rightarrow SL_n(\mathbb{R}), t \mapsto \prod_{(i,j) \in X} T_{i,j}(t\lambda_{ij})$ est un arc reliant I_n et A , donc A est connexe par arcs.

Références

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS ALGÈBRE 2, Cassini, p. 177.

Notes personnelles

Facile, et de toute façon à connaître. Bon "bouche-trou" pour les leçons 108 et 162.