

Développement : Processus de Galton Watson

Leçons : 223, 228, 229, 243, 244, 253, 264.

Théorème. On considère l'évolution d'une population, dont on note Z_n le nombre d'individus de la génération n . On suppose que chaque individu i de la génération n a $Y_{n,i}$ enfants. Les $(Y_{n,i})_{n,i}$ sont supposées iid, on note $m = \mathbb{E}[Y]$ leur moyenne et pour tout $k, p_k = \mathbb{P}(Y = k)$. On suppose $0 < p_0 < 1$, et $Z_0 = 1$. Alors :

- Si $m \leq 1$, la population s'éteint presque sûrement.
- Si $m > 1$, la population s'éteint avec une probabilité non nulle.

Démonstration.

Étape 1 : Fonction génératrice de Z_n .

On note $g(s) = \mathbb{E}[s^Y]$ la fonction génératrice de Y , ainsi $g(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k s^k$.

On note G_n la fonction génératrice de Z_n , et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n,i}$.

Alors pour $s \in [0, 1]$, $G_{n+1}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E}[s^{Y_{n,1} + \dots + Y_{n,Z_n}}] = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{Z_n=k\}} s^{Y_{n,1} + \dots + Y_{n,k}} \right]$
 $= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) \mathbb{E}[s^{Y_{n,1}} \times \dots \times s^{Y_{n,k}}] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) \mathbb{E}[s^Y]^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) g(s)^k = G_n(g(s))$, (la permutation somme-espérance étant permise par Fubini-Tonelli).

D'où, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n = g^n = g \circ \dots \circ g$.

Étape 2 : Croissance et convexité de g .

On a $g'(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k s^{k-1} = \mathbb{E}[Y s^{Y-1}] \geq 0$, et de même $g''(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) p_k s^{k-2} = \mathbb{E}[Y(Y-1) s^{Y-2}] \geq 0$.

De plus, comme $p_0 < 1$, il existe $k > 0$ tel que $p_k > 0$, et donc $g'(s) > 0$ pour $s \in]0, 1[$: g est strictement croissante. Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $g''(s) = 0$ et g est une fonction affine. Sinon, il existe $k > 2$ tel que $p_k > 0$, alors $g''(s) > 0$ sur $]0, 1[$ et g est strictement convexe.

Étape 3 : Probabilité d'extinction.

On note $A = \{\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = 0\}$. Comme $\{Z_n = 0\} \subseteq \{Z_{n+1} = 0\}$, c'est une union croissante.

D'où $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0)$. La suite $(G_n(0))_n$ est croissante car $\mathbb{P}(Z_n = 0) \leq \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$: elle converge donc vers un point fixe de g . De plus, $m = \mathbb{E}[Y] = g'(1)$. On pose $\varphi(s) = g(s) - s$, pour $s \in [0, 1]$.

- Si $m < 1$: on a $\varphi'(s) = g'(s) - 1$ donc $\varphi'(1) = g'(1) - 1 = m - 1 < 0$. De plus, comme g convexe, g' est croissante et φ' aussi. Donc, pour tout $s \in [0, 1]$, $\varphi'(s) < 0$ et φ est strictement décroissante. Donc pour tout $s \in [0, 1[$, $\varphi(s) < \varphi(1) = 0$. 1 est donc le seul point fixe de g , ainsi $\mathbb{P}(A) = 1$.
- Si $m > 1$: On a $\varphi'(1) > 0$ et $\varphi(1) = 0$, donc par continuité, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\varphi(\alpha) < 0$. Or $\varphi(0) = g(0) = p_0 > 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $v \in]0, \alpha[$ tel que $g(v) = v$. De plus, c'est le seul point fixe de g dans $]0, 1[$: en effet, s'il existait deux points fixes v_1, v_2 distincts dans $]0, 1[$, par Rolle il existe $\beta \in]v_1, v_2[$ tel que $\varphi'(\beta) = 0$. Rolle donne aussi qu'il existe $\beta' \in]v_2, 1[$ tel que $\varphi'(\beta') = 0$. Alors $g'(\beta) = g'(\beta') = 1$, donc en appliquant encore Rolle, il existe $\gamma \in]\beta, \beta'[$ tel que $g''(\gamma) = 0$: cela contredit la stricte convexité de g . Ainsi, $\mathbb{P}(A) = v$.
- Si $m = 1$, alors g strictement convexe. S'il y a un point fixe $p \in]0, 1[$, alors la tangente en (p, p) est en-dessous de la courbe, et la corde de (p, p) à $(1, 1)$ est au-dessus de la courbe. Mais ces deux droites sont confondues (elles ont même pente et passent par un même point), donc $g|_{[p, 1]} = \text{Id}$. Par prolongement analytique, $g = \text{Id}$. Mais alors $p_0 = 0$, contradiction. Donc 1 est le seul point fixe et $\mathbb{P}(A) = 1$.

□

Références

S. Méléard, ALÉATOIRE, École Polytechnique, p. 188.

M. Cottrell et al., EXERCICES DE PROBABILITÉS, Cassini, p. 72.