

Développement : Formule sommatoire de Poisson

Leçons : 240, 241, 246, 254.

Théorème (Formule sommatoire de Poisson). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant $f(x) = O(1/x^2)$ et $f'(x) = O(1/x^2)$ quand $|x| \rightarrow +\infty$. On note $\forall n \in \mathbb{Z}, f_n : x \mapsto f(x+n)$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ converge normalement sur tout compact et

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2n\pi) e^{2i\pi n x}.$$

Démonstration.

Étape 1 : La série des $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ converge normalement sur tout compact.

Soit $K > 0$.

On a $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc pour n assez grand, $\exists C > 0, \forall x \in [-K, K], |f_n(x)| = |f(x+n)| \leq \frac{C}{(x+n)^2}$.

Supposons $|n| \geq K+1$. Alors :

— Si $n \geq 0, x+n \geq -K+n = -K+|n| \geq 0$, d'où $(x+n)^2 \geq (|n|-K)^2$.

— Si $n < 0$, alors $(x+n)^2 = (-x-n)^2 = (-x+|n|)^2 \geq (|n|-K)^2$ en utilisant le cas précédent.

Pour n assez grand et $x \in [-K, K]$, on a donc $\forall x, |f_n(x)| \leq \frac{C}{(|n|-K)^2}$, d'où $\|f_n\|_{[-K, K]} \leq \frac{C}{(|n|-K)^2}$:

il y a convergence normale sur $[-K, K]$.

Étape 2 : Preuve de la formule.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$. Comme $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a comme précédemment, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'_n$ converge

normalement sur tout compact. F est donc de classe \mathcal{C}^1 et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(x+n)$.

Pour $x \in \mathbb{R}, N \geq 1$, on a $\sum_{n=-N}^N f(x+n+1) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on a

$F(x+1) = F(x)$ et F est 1-périodique. Calculons ses coefficients de Fourier. On a, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \int_0^1 F(x) e^{-2ik\pi x} dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) e^{-2ik\pi x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2ik\pi x} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2ik\pi(x-n)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2ikn\pi} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2ik\pi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2ik\pi x} dx = \widehat{f}(2k\pi). \end{aligned}$$

La permutation limite-intégrale est permise par la convergence normale (donc uniforme) sur $[0, 1]$ de $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$.

Comme F est \mathcal{C}^1 et 1-périodique, sa série de Fourier converge uniformément vers F , donc on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2n\pi) e^{2in\pi x}. \quad \square$$

Théorème (Fonction de Jacobi). On pose, pour $t > 0, \theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$.

Alors on a pour tout $t > 0, \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$.

Démonstration.

On pose, pour $\alpha > 0, f(x) = e^{-\alpha x^2}$. f vérifie bien les conditions d'application de la formule sommatoire de Poisson. On a pour $n \in \mathbb{Z}, \widehat{f}(2n\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-2in\pi x} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-2in\pi u/\sqrt{\alpha}} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-n^2 \pi^2/\alpha}$ d'après

le résultat sur la transformée de Fourier de la Gaussienne. La formule sommatoire de Poisson évaluée en $x = 0$ donne alors $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-n^2 \pi^2/\alpha}$, d'où en évaluant en $\alpha = \pi t$, on trouve $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$. \square

Références

X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses, p. 273.

Notes personnelles

On peut trouver d'autres applications de ce résultat, par exemple la formule d'inversion de Fourier dans \mathcal{S} dans Zyily-Queffélec.