

Développement : Formule des compléments

Leçons : 236, 245.

Lemme. Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

Démonstration. On pose, pour $\alpha \in]0, 1[$, $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$.

Étape 1 : Convergence de l'intégrale.

I_α est bien définie car intégrale d'une fonction mesurable positive.

De plus, en posant pour $t \in]0, +\infty[$, $u(t) = \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$, on a u continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable. Enfin,

$u(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ et $u(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ donc u est intégrable et $I_\alpha < +\infty$.

Étape 2 : Formule des résidus.

On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ et on définit, pour $z \in \Omega \setminus \{-1\}$, $f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$ (en prenant le log complexe défini sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ et la détermination de la puissance associée). f holomorphe sur $\Omega \setminus \{-1\}$ avec un pôle simple en -1 , et on a $\text{Res}(f, -1) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$. Soient $0 < \varepsilon < 1 < R$.

On note $K_{\varepsilon,R}$ le compact délimité par le demi-cercle $C_\varepsilon = \{|z| = \varepsilon, \Re(z) \leq 0\}$, les deux segments $I_{\varepsilon,R}^+ = [i\varepsilon, i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$, $I_{\varepsilon,R}^- = [-i\varepsilon, -i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$ et l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon,R} = \{Re^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi], |\theta| \geq \theta_{\varepsilon,R}\}$ avec $\theta_{\varepsilon,R} = \arctan(\varepsilon/\sqrt{R^2 - \varepsilon^2})$. On a $-1 \in K_{\varepsilon,R}$, donc la formule des résidus donne $\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f(z)dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$.

Étape 3 : Découpage de l'intégrale, passage à la limite en ε .

On a : $\left| \int_{C_\varepsilon} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi\varepsilon}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon)} = \frac{\pi\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} \frac{iRe^{it}}{R^\alpha e^{i\alpha t}(1+Re^{it})} dt = \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} i \frac{R^{1-\alpha} e^{it(1-\alpha)}}{1+Re^{it}} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} i \frac{R^{1-\alpha} e^{it(1-\alpha)}}{1+Re^{it}} dt$ par convergence dominée.

Soit $t \in]0, +\infty[$. On a :

- $(t+i\varepsilon)^\alpha \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} t^\alpha$ car $\arg(t+i\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$.
- $(t-i\varepsilon)^\alpha \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{2i\pi\alpha} t^\alpha$ car $\arg(t-i\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\pi$.

De plus, pour $(t, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $|f(t+iy)| \leq \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ et cette dernière fonction est intégrable sur $]0, R]$.

D'où par convergence dominée, $\int_{I_{\varepsilon,R}^+} f(z)dz = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{dt}{(t+i\varepsilon)^\alpha(1+t+i\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$.

De même, $\int_{I_{\varepsilon,R}^-} f(z)dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-2i\pi\alpha} \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$.

Étape 4 : Passage à la limite en R , conclusion.

On a donc $(1 - e^{2i\pi\alpha}) \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} + i \int_0^{2\pi} \frac{R^{1-\alpha} e^{it(1-\alpha)}}{1+Re^{it}} dt = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$.

Pour $t \in [0, 2\pi]$, $\left| \frac{R^{1-\alpha} e^{it(1-\alpha)}}{1+Re^{it}} \right| \leq \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$. D'où en passant à la limite, $(1 - e^{2i\pi\alpha})I_\alpha = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$, soit

$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}. \quad \square$$

Théorème (Formule des compléments). Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $0 < \Re(z) < 1$, on a $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Démonstration. D'après le principe des zéros isolés, il suffit de prouver cela pour tout $\alpha \in]0, 1[$. Soit $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Par Fubini-Tonelli, on a $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_U t^{\alpha-1} s^{-\alpha} e^{-t-s} dt ds = \int_U \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha e^{-(s+t)} ds \frac{dt}{t}$. On fait le changement de

variables $(u, v) = (s + t, s/t)$, d'inverse $(s, t) = (\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v})$, de jacobien en (s, t) égal à $\frac{v+1}{t}$.

$$\text{On a donc } \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_U \frac{e^{-u}}{v^\alpha(1+v)} du dv = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^\alpha(1+v)} = I_\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

□

Références

E. Amar, E. Matheron, ANALYSE COMPLEXE, Cassini, p. 249.

Notes personnelles

Le changement de variable, plus simple que celui proposé par Amar et Matheron, vient de la page web de Caroline Robet. Attention pour ce développement aux questions sur le logarithme complexe qui attendent au tournant !