

Développement : Densité des fonctions continues nulle part dérivables

Leçons : 202, 205, 228.

Théorème. *L'ensemble A des fonctions continues nulle part dérivables sur $[0, 1]$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme uniforme.*

Démonstration.

Soit $B = A^c$ l'ensemble des fonctions continues dérivables en au moins un point. On sait que pour une fonction f dérivable en x , la quantité $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est bornée au voisinage de 0. Ainsi, si on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_n = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]), \exists x \in [0, 1], \forall y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq n|x - y|\}, \text{ on a } B \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} F_n.$$

Étape 1 : Les F_n sont fermés.

Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in F_n^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $f \in \mathcal{C}([0, 1])$.

Ainsi, pour tout k , il existe $x_k \in [0, 1]$ tel que $\forall y, |f_k(x_k) - f_k(y)| \leq n|x_k - y|$. Comme $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$ compact, on peut en extraire une sous-suite convergente : $x_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$.

On a alors $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_{\varphi(k)})| + |f(x_{\varphi(k)}) - f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)})| + |f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) - f_{\varphi(k)}(y)| + |f_{\varphi(k)}(y) - f(y)|$.

- Le premier terme tend vers 0 par continuité de f .
- Le second terme est inférieur à $\|f - f_{\varphi(k)}\|_{\infty}$ donc tend vers 0.
- Le troisième terme est inférieur à $n|x_{\varphi(k)} - y|$ qui tend vers $n|x - y|$.
- Le quatrième terme est inférieur à $\|f - f_{\varphi(k)}\|_{\infty}$ donc tend vers 0.

Les inégalités précédentes et le passage à la limite donnent $|f(x) - f(y)| \leq n|x - y|$ donc $f \in F_n$ et F_n est fermé.

Étape 2 : Les F_n sont d'intérieur vide.

Soit $f \in F_n$, soit $\varepsilon > 0$, montrons que $B(f, \varepsilon)$ rencontre F_n^c , i.e. qu'il existe $g \in \mathcal{C}([0, 1])$ avec $\|f - g\|_{\infty} \leq \varepsilon$ mais $\forall x, \exists y, |f(x) - f(y)| > n|x - y|$. Les fonctions polynomiales étant denses dans $\mathcal{C}([0, 1])$ (théorème de Weierstrass), il existe P polynôme tel que $\|P - f\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $M = \|P'\|_{\infty}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon N \geq 2(M + n + 1)$. On découpe

$$[0, 1] \text{ en } \bigcup_{k=0}^{N-1} \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right] \text{ et on définit la fonction } g_0 \text{ sur } [0, 1/N] \text{ par } g_0(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon N x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2N} \\ \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon N x}{2} & \text{si } \frac{1}{2N} \leq x \leq \frac{1}{N} \end{cases}, \text{ on la}$$

prolonge ensuite par $\frac{1}{N}$ -périodicité à $[0, 1]$. g_0 est dérivable sauf en les $(k + \frac{1}{2})\frac{1}{N}, k \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, et en les points où elle est dérivable, on a $|g_0'(x)| = \frac{\varepsilon N}{2}$. De plus g_0 continue et $\|g_0\|_{\infty} = \frac{\varepsilon}{4}$. On pose $g = P + g_0$.

Alors $\|f - g\|_{\infty} \leq \|f - P\|_{\infty} + \|g_0\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$.

On a, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall x, y \in [0, 1], |P(x) - P(y)| \leq M|x - y|$.

Soient $x, y \in [0, \frac{1}{2N}]$. On a $|g_0(x) - g_0(y)| = \frac{\varepsilon N}{2}|x - y| \geq (M + n + 1)|x - y|$. De même, si $x, y \in [\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}]$, $|g_0(x) - g_0(y)| = \frac{\varepsilon N}{2}|x - y| \geq (M + n + 1)|x - y|$. Ainsi, avec le prolongement périodique, on voit que pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $y \in [0, 1]$ tel que $|g_0(x) - g_0(y)| \geq (M + n + 1)|x - y|$.

Ainsi, $|g(x) - g(y)| \geq |g_0(x) - g_0(y)| - |P(x) - P(y)| \geq (n + 1)|x - y|$ donc $g \notin F_n$. Cela prouve que F_n est d'intérieur vide.

Étape 3 : Conclusion.

On a prouvé que les F_n sont des fermés d'intérieur vide de l'espace $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$ qui est un espace complet.

D'après le théorème de Baire, $\bigcup_{k=0}^{\infty} F_n$ est d'intérieur vide, donc B est d'intérieur vide, et donc $A = B^c$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$. □

Exemples de fonctions continues nulle part dérivables

Fonction de Van den Waerden

Si on note, pour $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ la distance de x à l'entier le plus proche, alors la fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{2^n x\}}{2^n}$ est continue nulle part dérivable sur $[0, 1]$.

Fonction de Weierstrass

Soient $a \in]0, 1[$, $b \in \mathbb{N}^*$ pair tel que $ab > 1 + \pi$. Alors la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{ib^n \pi x}$ est continue nulle part dérivable.

Références

C. Zuily, H. Queffelec, ANALYSE POUR L'AGRÉGATION, Dunod, p. 270.