

## Développement : Équation des ondes

**Leçons : 222.**

**Théorème.** On considère l'équation de transport  $\partial_t f + c\partial_x f = g$  sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ,  $f(0, x) = f_0(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , où  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ ,  $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}^*$ . Ce problème admet une unique solution, donnée par

$$f(t, x) = f_0(x - ct) + \int_0^t g(s, x - c(t - s)) ds$$

*Démonstration.* Soit  $f$  une solution. On considère, pour  $\xi \in \mathbb{R}$ , le problème de Cauchy  $x'(t) = c$ ,  $x(0) = \xi$ .

La solution est donnée par  $x(t) = ct + \xi$ .

Alors, la fonction  $F : t \mapsto f(t, x(t))$  vérifie  $F'(t) = \partial_t f(t, x(t)) + c\partial_x f(t, x(t)) = g(t, x(t))$ . On en déduit que

$$F(t) = F(0) + \int_0^t g(s, x(s)) ds = f_0(\xi) + \int_0^t g(s, cs + \xi) ds. \text{ Or on a } x = ct + \xi \text{ d'où } \xi = x - ct.$$

Finalement,  $f(t, x) = f_0(x - ct) + \int_0^t g(s, x - c(t - s)) ds$ . □

**Théorème.** On s'intéresse à l'équation des ondes 1D  $\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0$  pour  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , avec les conditions initiales  $u(0, x) = u_0(x)$ ,  $\partial_t u(0, x) = v_0(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , avec  $u_0, v_0 \in \mathcal{C}^1$ . Alors une solution est donnée par

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left( u_0(x + ct) + u_0(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds \right)$$

*Démonstration.*

Étape 1 : Un premier problème de transport.

Soit  $u$  solution de classe  $\mathcal{C}^2$ . D'après le théorème de Schwarz, pour des fonctions  $\mathcal{C}^2$  on a  $\partial_{tt}^2 - c^2 \partial_{xx}^2 = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)$ .

Ainsi, si on pose  $w = \partial_t u - c\partial_x u$ , on a  $w(0, x) = \partial_t u(0, x) - c\partial_x u(0, x) = v_0(x) - cu_0'(x)$ .  $w$  est donc solution du problème de transport  $\partial_t w + c\partial_x w = 0$ ,  $w(0, x) = v_0(x) - cu_0'(x)$ .

On déduit de ce qui précède que  $w(t, x) = w_0(x - ct) = v_0(x - ct) - cu_0'(x - ct)$ .

Étape 2 : Un second problème de transport.

Maintenant,  $u$  est solution du problème de transport  $\partial_t u - c\partial_x u = w$ ,  $u(0, x) = u_0(x)$ . D'après ce qui précède, on a

$$\text{alors } u(t, x) = u_0(x + ct) + \int_0^t w(s, x + c(t - s)) ds.$$

$$\text{Or } \int_0^t w(s, x + c(t - s)) ds = \int_0^t (v_0(x + ct - 2cs) - cu_0'(x + ct - 2cs)) ds$$

$$= \int_0^t v_0(x + ct - 2cs) ds - \frac{1}{2} (u_0(x + ct) - u_0(x - ct)).$$

$$\text{Il s'ensuit que } u_0(t, x) = \frac{1}{2} \left( u_0(x + ct) + u_0(x - ct) + 2 \int_0^t v_0(x + ct - 2cs) ds \right).$$

Finalement, le changement de variable  $\tau = x + ct - 2cs$  donne la solution cherchée. □

**Théorème.** On suppose  $u$  à support compact. Alors le problème possède un invariant, et la solution est unique.

*Démonstration.*

On multiplie l'équation par  $\partial_t u$  et on intègre sur  $\mathbb{R}$ . On obtient  $\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u \partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_t u \partial_{xx}^2 u) dx = 0$ .

Le premier terme vaut  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2 dx \right)$  (on peut dériver sous l'intégrale car  $u$  à support compact).

En intégrant par parties, on obtient que le second terme vaut  $c^2 \int_{\mathbb{R}} \partial_x u \partial_{tx}^2 u dx = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} c^2 \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2 dx \right)$ .

Ainsi l'énergie donnée par  $E(t) = \int_{\mathbb{R}} [(\partial_t u)^2 + c^2 (\partial_x u)^2] dx$  se conserve. Ainsi, si  $u_1, u_2$  sont deux solutions, alors  $u_1 - u_2$  aussi solution avec des données de Cauchy nulles, alors  $E(t) = E(0) = 0$  et  $u_1 - u_2 = 0$ . □

## Références

L. Di Menza, ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, Cassini, p. 54.

## Notes personnelles

*Ne se recase pas bien, mais pas difficile et utile pour travailler la méthode des caractéristiques si on est en option B. Développement présenté à l'oral d'option (!) dans l'exposé sur un texte qui parlait de l'équation des ondes et de décomposition d'opérateurs.*