

## Développement : Équation de la chaleur avec conditions aux limites périodiques

**Leçons :** 209, 222, 241, 246.

**Théorème.** Soit  $u_0 \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux avec  $u(0) = u(2\pi)$ . On considère le problème aux limites  $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0$  pour  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times ]0, 2\pi[$ ,  $u(0, x) = u_0(x)$  pour  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $u(t, 0) = u(t, 2\pi)$  pour  $t \in \mathbb{R}_+$ . Il y a une unique solution continue sur  $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ ,  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[$ .

*Démonstration.* On procède par “analyse-synthèse”.

Étape 1 : Analyse.

S’il existe une solution  $u$ . On peut prolonger par  $2\pi$ -périodicité  $u_0$  à  $\mathbb{R}$  et  $u$  à  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . À  $t > 0$  fixé,  $u_t : x \mapsto u(t, x)$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et  $2\pi$ -périodique, donc somme de sa série de Fourier :

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{inx} \text{ avec pour } t > 0, c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) e^{-inx} dx.$$

De même,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  est somme de sa série de Fourier :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -n^2 c_n(t) e^{inx}$  (en faisant une double intégration

par parties dans le calcul des coefficients de Fourier de  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ).

Par ailleurs,  $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n(t) e^{inx}$  avec  $\tilde{c}_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{-inx} dx$ .

Comme  $u$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , donc comme on intègre sur un compact,  $c_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et par dérivation

d’une intégrale à paramètre,  $c'_n(t) = \tilde{c}_n(t)$ . Finalement, l’équation sur  $u$  se réécrit  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c'_n(t) + n^2 c_n(t)) e^{inx} = 0$ .

Or, à  $t$  fixé, cette série est normalement convergente en  $x$  car somme de deux séries normalement convergentes (par Dirichlet). Ainsi, pour  $n_0 \in \mathbb{Z}$ , on peut effectuer la permutation série-intégrale suivante :

$$0 = \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c'_n(t) + n^2 c_n(t)) e^{inx} \right) e^{i-n_0 x} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c'_n(t) + n^2 c_n(t)) \int_0^{2\pi} e^{i(n-n_0)x} dx = 2\pi (c'_{n_0}(t) + n_0^2 c_{n_0}(t)).$$

Ainsi, pour tous  $t > 0, n \in \mathbb{Z}, c'_n(t) + n^2 c_n(t) = 0$  donc il existe  $\alpha_n \in \mathbb{C}$  tel que  $c_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 t}$ .

Déterminons  $\alpha_n$ . On note  $u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{inx}$  la série de Fourier de  $u_0$ . En appliquant Parseval à  $u_0 - u_t$ , on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |d_n - c_n(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x) - u(t, x)|^2 dx. \text{ D'où, à } n \text{ fixé, } |d_n - c_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x) - u(t, x)|^2 dx \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

par convergence dominée. D'où  $|d_n - \alpha_n|^2 = 0$  et  $\alpha_n = d_n$ .

Ainsi, si  $u$  solution, on a pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ .

Étape 2 : Synthèse.

Soit  $u$  la fonction obtenue précédemment, montrons qu’elle convient. La série qui définit  $u$  converge normalement car  $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, |d_n e^{-n^2 t} e^{inx}| \leq |d_n|$  et  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|$  converge puisque  $u_0$  satisfait le théorème de Dirichlet. Ainsi  $u$

bien définie et continue puisque chaque terme de la série est continu. De plus, pour tout  $t \geq 0, u_t$  est  $2\pi$ -périodique.

La dérivation formelle de cette série donne, pour  $p, q \in \mathbb{N}, \frac{\partial^{p+q} u}{\partial t^p \partial x^q}(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^p i^q n^{2p+q} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ . Or on a

$$|d_n| \leq K := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x)| dx, \text{ d'où pour } t \in ]t_0, +\infty[, |(-1)^p i^q n^{2p+q} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}| \leq K n^{2p+q} e^{-n^2 t_0} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ , la série est normalement convergente sur  $]t_0, +\infty[$ . Par dérivation des intégrales à paramètre et en prenant  $t_0$  arbitrairement petit, on obtient que  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ . Comme les dérivées s’obtiennent par dérivation formelle,  $u$  satisfait bien l’équation de la chaleur.  $\square$

## Références

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS ANALYSE 4, Cassini, p. 49.