

## Développement : Équation de Bessel

**Leçons :** 221, 244.

On considère l'équation différentielle linéaire (E)  $xy'' + y' + xy = 0$ .

Étape 1 : Solution DSE en 0.

On cherche une solution  $f$  développable en série entière au voisinage de 0 :  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour tout  $x \in ]-R, R[$ .

Ainsi  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  sur  $] -R, R[$  et pour  $x \in ] -R, R[$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \text{ et } f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}.$$

Alors  $f$  solution de (E) équivaut à  $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 0$ , soit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 0. \text{ Par unicité du DSE, on a } a_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 1, (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1}.$$

On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2n+1} = 0$  et  $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)^2(2n-2)^2 \dots 2^2} a_0 = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} a_0$ .

Finalement, pour  $x \in ]-R, R[$ ,  $f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ . Réciproquement, cette série entière a un rayon de convergence infini, donc toute fonction de cette forme est solution.

**Théorème.** On note  $f_0$  la solution DSE vérifiant  $f(0) = 1$ . Si  $f$  est une solution sur  $]0, a[$ , on a  $(f, f_0)$  libre ssi  $f$  non bornée au voisinage de 0.

*Démonstration.*  $f_0$  continue en 0 donc bornée au voisinage de 0, ainsi si  $(f, f_0)$  liée,  $f$  bornée au voisinage de 0.

Réciproquement, supposons  $(f, f_0)$  libre. Sur  $]0, a[$ , (E) se réécrit  $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$  dont l'ensemble des solutions est un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2 de base  $(f, f_0)$ . On considère le Wronskien associé  $W = f f_0' - f' f_0$ , et  $W'(x) = f f_0''(x) - f''(x) f_0(x) = f(-\frac{1}{x} f_0'(x) - f_0(x)) - (-\frac{1}{x} f'(x) - f(x)) f_0(x) = -\frac{1}{x} W(x)$ .

Ainsi, pour tout  $x \in ]0, a[$ ,  $W(x) = \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$  avec  $\lambda \neq 0$  car  $(f, f_0)$  libre.

Ainsi, pour tout  $x \in ]0, a[$ ,  $f(x) f_0'(x) - f'(x) f_0(x) = \frac{\lambda}{x}$ . Supposons  $f$  bornée au voisinage de 0, alors comme  $\lim_0 f_0 = 1$  et  $\lim_0 f_0' = 0$ , on a  $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\lambda}{x}$ .

Soit  $b \in ]0, a[$ . On a  $x \mapsto -\lambda/x$  de signe constant sur  $]0, b[$  et non intégrable sur  $]0, b[$ , donc par intégration des équivalents,  $f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t) dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\lambda \int_b^x \frac{dt}{t} = \lambda(\ln(b) - \ln(x))$ . Ainsi  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\lambda \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ , contradiction avec l'hypothèse  $f$  bornée. Donc  $f$  non bornée.  $\square$

**Application.**  $g(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ .

Montrons que  $g$  solution de (E). En dérivant sous le signe somme (possible car on intègre des fonctions continues sur un segment), on a  $g'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) \sin(x \sin(\theta)) d\theta$ , et  $g''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(\theta) \cos(x \sin(\theta)) d\theta$ . Alors, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$x g''(x) + g'(x) + x g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \cos(x \sin(\theta))(1 - \sin^2(\theta)) - \sin(\theta) \sin(x \sin(\theta))) d\theta = \frac{1}{\pi} [\sin(x \sin(\theta)) \cos(\theta)]_0^\pi = 0.$$

Donc  $g$  est solution. Elle est clairement bornée, donc  $(f_0, g)$  est liée. Comme  $f_0(0) = g(0) = 1$ , elles coïncident sur  $\mathbb{R}_+$ , puis sur  $\mathbb{R}$  car elles sont paires. D'où le résultat.

**Application.**

On a  $g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(\theta)^{2k}}{(2k)!} x^{2k} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left( \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\theta)^{2k} d\theta \right) x^{2k}$  en intégrant terme à terme.

Par unicité du DSE, on en déduit la valeur de l'intégrale de Wallis :  $\int_0^\pi \sin(\theta)^{2k} d\theta = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ .

## Références

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS ANALYSE 4, Cassini, p. 101.

## Notes personnelles

*Original, on peut plus ou moins en faire selon le temps dont on dispose.*