

## Développement : Théorème d'échantillonnage de Shannon

**Leçons :** 201, 202, 205, 208, 213, 240.

**Théorème.** Soit  $I = [-1, 1]$ . On considère  $BL^2(I) = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \hat{u} = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus I\}$ .

- (i).  $BL^2(I)$  est un espace de Hilbert (muni du produit scalaire usuel) dont  $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sinc}(2k\pi - x)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne.
- (ii).  $\forall u \in BL^2(I), u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(2k\pi) \text{sinc}(2k\pi - x)$ , la convergence ayant lieu uniformément et dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

L'idée est que pour un signal à spectre borné, on peut reconstituer tout le signal à partir de valeurs ponctuelles.

*Démonstration.*

Étape 1 :  $BL^2(I)$  est un espace de Hilbert.

Il suffit de montrer que c'est un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{R})$ . Par linéarité de la transformée de Fourier, c'est clairement un sous-espace vectoriel. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in BL^2(I)^{\mathbb{N}}$  qui converge dans  $L^2$ . Par continuité de la transformée de Fourier,  $\hat{u}_n$  converge vers  $\hat{u}$  dans  $L^2$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la convergence a lieu presque partout. On a pour tout  $n, \hat{u}_n|_{\mathbb{R} \setminus I} = 0$  presque partout donc en prenant la limite simple,  $\hat{u}|_{\mathbb{R} \setminus I} = 0$  presque partout. Donc  $u \in BL^2(I)$  et  $BL^2(I)$  fermé dans  $L^2$ , donc c'est un espace de Hilbert.

Étape 2 : Base hilbertienne.

On pose, pour  $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, e_k(x) = \begin{cases} \sqrt{\pi} e^{2ik\pi x} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$  et  $\varepsilon_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sinc}(2k\pi - x)$ .

On a  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{e}_k(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e_k(t) e^{-it\xi} dt = \sqrt{\pi} \int_{-1}^1 e^{i(2k\pi - \xi)t} dt = 2\sqrt{\pi} \text{sinc}(2k\pi - \xi) = 2\pi \varepsilon_k(\xi)$ .

Par Plancherel, on a  $\langle e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{e}_j, \hat{e}_k \rangle = 2\pi \langle \varepsilon_j, \varepsilon_k \rangle$ . Par ailleurs,  $\langle e_j, e_k \rangle = \pi \int_{-1}^1 e^{2i\pi(j-k)x} dx = 2\pi \delta_{jk}$ .

Ainsi  $\langle \varepsilon_j, \varepsilon_k \rangle = \delta_{jk}$  et la famille  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée. De plus, par inversion de Fourier,  $\hat{\varepsilon}_k = \check{e}_k = e_{-k} \in BL^2(I)$ . Enfin, si  $u \in BL^2(I)$  orthogonal à cette famille, alors par Plancherel,  $\hat{u}$  orthogonal à  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  famille totale de  $L^2(I)$ , donc  $\hat{u} = 0$  pp sur  $I$  (et aussi sur  $\mathbb{R} \setminus I$  par définition de  $BL^2(I)$ ), par suite  $u = 0$ . Donc la famille  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est totale, et c'est une base hilbertienne de  $BL^2(I)$ .

Étape 3 :  $BL^2(I)$  s'injecte continûment dans  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  (fonctions continues nulles en l'infini).

Si  $u \in BL^2(I)$ , alors  $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$  car continue et nulle en dehors de  $I$ . La formule d'inversion de Fourier donne alors  $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_I \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$  donc  $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  par continuité des intégrales à paramètre et Riemann-Lebesgue.

Alors,  $\forall x \in \mathbb{R}, |u(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \|\hat{u}\|_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \|\hat{u}\|_2 = 2\sqrt{\pi} \|u\|_2$  par Cauchy-Schwarz puis Plancherel.

Donc  $\|u\|_{\infty} \leq 2\sqrt{\pi} \|u\|_2$  et l'injection de  $BL^2(I)$  dans  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  est continue.

Étape 4 : Théorème d'échantillonnage.

D'après l'étape 2, on a  $\forall u \in BL^2(I), u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k$ , et la convergence a lieu dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Mais d'après l'étape 3, la convergence est aussi uniforme, et donc aussi simple.

En évaluant en  $x = 2j\pi$  et en notant que sinc est impaire, on a  $u(2j\pi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle u, \varepsilon_j \rangle$ .

Donc pour tout  $k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}, \langle u, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k(x) = \sqrt{\pi} u(2k\pi) \varepsilon_k(x) = u(2k\pi) \text{sinc}(2k\pi - x)$ . □

*Remarque :* on utilise ici la notation  $\check{f}(x) = f(-x)$ .

### Références

M. Willem, ANALYSE HARMONIQUE RÉELLE, Hermann, p. 126.

## Notes personnelles

Très joli développement qui se recase bien. Attention, c'est une version modifiée par rapport à celle du Willem donc à apprendre par cœur (d'autres versions dans Peyré ou Gasquet-Witonski). Bon à savoir, un signal à spectre borné n'existe pas "dans la nature", il faut d'abord le faire passer par un filtre passe-bande avant de l'échantillonner.