

Développement : Théorème d'échantillonnage de Shannon

Leçons : 201, 202, 205, 208, 213, 240.

Théorème. Soit $I = [-1, 1]$. On considère $BL^2(I) = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \hat{u} = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus I\}$.

- (i). $BL^2(I)$ est un espace de Hilbert (muni du produit scalaire usuel) dont $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sinc}(2k\pi - x)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne.
- (ii). $\forall u \in BL^2(I), u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(2k\pi) \text{sinc}(2k\pi - x)$, la convergence ayant lieu uniformément et dans $L^2(\mathbb{R})$.

L'idée est que pour un signal à spectre borné, on peut reconstituer tout le signal à partir de valeurs ponctuelles.

Démonstration.

Étape 1 : $BL^2(I)$ est un espace de Hilbert.

Il suffit de montrer que c'est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$. Par linéarité de la transformée de Fourier, c'est clairement un sous-espace vectoriel. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in BL^2(I)^{\mathbb{N}}$ qui converge dans L^2 . Par continuité de la transformée de Fourier, \hat{u}_n converge vers \hat{u} dans L^2 . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la convergence a lieu presque partout. On a pour tout $n, \hat{u}_n|_{\mathbb{R} \setminus I} = 0$ presque partout donc en prenant la limite simple, $\hat{u}|_{\mathbb{R} \setminus I} = 0$ presque partout. Donc $u \in BL^2(I)$ et $BL^2(I)$ fermé dans L^2 , donc c'est un espace de Hilbert.

Étape 2 : Base hilbertienne.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, e_k(x) = \begin{cases} \sqrt{\pi} e^{2ik\pi x} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$ et $\varepsilon_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sinc}(2k\pi - x)$.

On a $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{e}_k(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e_k(t) e^{-it\xi} dt = \sqrt{\pi} \int_{-1}^1 e^{i(2k\pi - \xi)t} dt = 2\sqrt{\pi} \text{sinc}(2k\pi - \xi) = 2\pi \varepsilon_k(\xi)$.

Par Plancherel, on a $\langle e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{e}_j, \hat{e}_k \rangle = 2\pi \langle \varepsilon_j, \varepsilon_k \rangle$. Par ailleurs, $\langle e_j, e_k \rangle = \pi \int_{-1}^1 e^{2i\pi(j-k)x} dx = 2\pi \delta_{jk}$.

Ainsi $\langle \varepsilon_j, \varepsilon_k \rangle = \delta_{jk}$ et la famille $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée. De plus, par inversion de Fourier, $\hat{\varepsilon}_k = \check{\varepsilon}_k = e_{-k} \in BL^2(I)$. Enfin, si $u \in BL^2(I)$ orthogonal à cette famille, alors par Plancherel, \hat{u} orthogonal à $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ famille totale de $L^2(I)$, donc $\hat{u} = 0$ pp sur I (et aussi sur $\mathbb{R} \setminus I$ par définition de $BL^2(I)$), par suite $u = 0$. Donc la famille $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est totale, et c'est une base hilbertienne de $BL^2(I)$.

Étape 3 : $BL^2(I)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (fonctions continues nulles en l'infini).

Si $u \in BL^2(I)$, alors $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$ car continue et nulle en dehors de I . La formule d'inversion de Fourier donne alors $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_I \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$ donc $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ par continuité des intégrales à paramètre et Riemann-Lebesgue.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, |u(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \|\hat{u}\|_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \|\hat{u}\|_2 = 2\sqrt{\pi} \|u\|_2$ par Cauchy-Schwarz puis Plancherel.

Donc $\|u\|_{\infty} \leq 2\sqrt{\pi} \|u\|_2$ et l'injection de $BL^2(I)$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est continue.

Étape 4 : Théorème d'échantillonnage.

D'après l'étape 2, on a $\forall u \in BL^2(I), u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k$, et la convergence a lieu dans $L^2(\mathbb{R})$.

Mais d'après l'étape 3, la convergence est aussi uniforme, et donc aussi simple.

En évaluant en $x = 2j\pi$ et en notant que sinc est impaire, on a $u(2j\pi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle u, \varepsilon_j \rangle$.

Donc pour tout $k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}, \langle u, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k(x) = \sqrt{\pi} u(2k\pi) \varepsilon_k(x) = u(2k\pi) \text{sinc}(2k\pi - x)$. □

Remarque : on utilise ici la notation $\check{f}(x) = f(-x)$.

Références

M. Willem, ANALYSE HARMONIQUE RÉELLE, Hermann, p. 126.

Notes personnelles

Très joli développement qui se recase bien. Attention, c'est une version modifiée par rapport à celle du Willem donc à apprendre par cœur (d'autres versions dans Peyré ou Gasquet-Witonski). Bon à savoir, un signal à spectre borné n'existe pas "dans la nature", il faut d'abord le faire passer par un filtre passe-bande avant de l'échantillonner.