

## Développement : Décomposition de Dunford

**Leçons :** 153, 154, 155, 156, 157.

**Théorème.** Soit  $k$  un corps, soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que son polynôme caractéristique  $\chi_f$  soit scindé sur  $k$ . Alors il existe un unique couple  $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $d$  diagonalisable,  $n$  nilpotent,  $f = d + n$  et  $d \circ n = n \circ d$ . De plus,  $d$  et  $n$  sont des polynômes en  $f$ .

*Démonstration.*

Étape 1 : Projections sur les sous-espaces caractéristiques.

Comme  $\chi_f$  est scindé, il s'écrit  $\chi_f = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ , avec les  $\lambda_i$  deux à deux distincts et les  $\alpha_i > 0$ . Pour  $1 \leq i \leq s$ , on

pose  $N_i = \ker((f - \lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i})$ . D'après le lemme des noyaux,  $E = \bigoplus_{i=1}^s N_i$ . Pour tout  $i$ , on pose  $Q_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$ . Il

n'y a pas de facteur commun à tous les  $Q_i$ , ils sont donc premiers entre eux dans leur ensemble et on peut appliquer le théorème de Bézout : il existe  $U_1, \dots, U_s \in k[X]$  tels que  $\sum_{i=1}^s U_i Q_i = 1$ . Pour tout  $i$ , on pose  $p_i = (U_i Q_i)(f)$ ,

ainsi  $\text{Id}_E = \sum_{j=1}^s U_j(f) \circ Q_j(f) = \sum_{j=1}^s p_j$ . De plus, pour  $i \neq j$ ,  $p_i \circ p_j = (Q_i Q_j)(f) \circ (U_i U_j)(f) = 0$  car  $\chi_f | Q_i Q_j$ .

Donc en composant à gauche la première relation par  $p_i$ , on a pour tout  $i$ ,  $p_i = \sum_{j=1}^s p_i \circ p_j = p_i^2$ , donc les  $p_i$  sont des projecteurs.

Montrons que  $\text{Im}(p_i) = N_i$ . Soit  $y = p_i(x) \in \text{Im}(p_i)$ . Alors  $(f - \lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i}(p_i(x)) = \chi_f(f) \circ U_i(f)(x) = 0$ . Donc  $y = p(x) \in N_i$ . Réciproquement, soit  $x \in N_i$ . Alors  $x = \sum_{j=1}^s p_j(x)$ , or pour tout  $j \neq i$ ,  $p_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$

car  $(X - \lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i} | Q_j$  et  $x \in N_i$ . Donc  $x = p_i(x) \in \text{Im}(p_i)$ , et  $\text{Im}(p_i) = N_i$ .

Montrons que  $\ker(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$ . Si  $j \neq i$ ,  $N_j \subseteq \ker(p_i)$  car si  $x \in N_j$ ,  $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$  car

$(X - \lambda_j \text{Id}_E)^{\alpha_j} | Q_i$ . Il suit que  $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subseteq \ker(p_i)$ . Et si  $x \in \ker(p_i)$ ,  $x = \sum_{j=1}^s p_j(x) = \sum_{j \neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$ . On a montré

que  $p_i$  est la projection sur  $N_i$  parallèlement à  $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ , et par construction, c'est un polynôme en  $f$ .

Étape 2 : Existence de la décomposition.

On pose  $d = \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i$ . Soit  $R = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)$ . Alors si  $x \in N_j$ ,  $(d - \lambda_j \text{Id}_E)(x) = \left( \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i(x) - \lambda_j x \right) = 0$ . Il s'ensuit que  $R$  annule  $d$ , et comme  $R$  scindé à racines simples,  $d$  diagonalisable.

On pose  $n = f - d = f \circ \left( \sum_{i=1}^s p_i \right) - \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^s (f - \lambda_i \text{Id}_E) \circ p_i$ . Montrons par récurrence que pour tout

$q \in \mathbb{N}^*$ ,  $n^q = \sum_{i=1}^s (f - \lambda_i \text{Id}_E)^q \circ p_i$ . On a vu que c'était vrai pour  $q = 1$ . Si c'est vrai pour  $q \in \mathbb{N}^*$ , alors

$n^{q+1} = n^q \circ n = \left( \sum_{i=1}^s (f - \lambda_i \text{Id}_E)^q \circ p_i \right) \circ \left( \sum_{j=1}^s (f - \lambda_j \text{Id}_E) \circ p_j \right) = \sum_{i=1}^s (f - \lambda_i \text{Id}_E)^{q+1} \circ p_i$ , en notant que  $p_i \circ p_j = 0$

pour  $i \neq j$ , que  $p_i^2 = p_i$  et que tous les termes commutent (les  $p_i$  étant des polynômes en  $f$ ). D'où le résultat.

Si  $q = \max\{\alpha_i, 1 \leq i \leq s\}$ , on a  $(f - \lambda_i \text{Id}_E)^q \circ p_i = [(X - \lambda_i)^q U_i Q_i](f) = 0$  pour tout  $i$  car  $\chi_f | (X - \lambda_i)^q Q_i$ , donc  $n^q = 0$ . On a donc l'existence de la décomposition.

Étape 3 : Unicité.

Soit  $(d', n')$  qui vérifie aussi les mêmes propriétés, alors  $d', n'$  commutent avec  $d' + n' = f$ , puis avec  $d, n$  qui sont des polynômes en  $f$ . Donc  $d, d'$  diagonalisables qui commutent, donc diagonalisables dans une même base. Comme

$d - d' = n' - n$  nilpotente (la somme d'endomorphismes nilpotents qui commutent est nilpotente par le binôme de Newton), on en déduit  $d - d' = n' - n = 0$ , d'où l'unicité.  $\square$

### Notes personnelles

Un immense classique, de toute façon à connaître donc autant le faire en développement. On peut noter qu'il existe une méthode effective de calcul de cette décomposition (une sorte de méthode de Newton, voir Risler-Boyer).

### Références

X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses, p. 194.