

Développement : Décomposition de Bruhat

Leçons : 101, 105, 106, 150, 151.

Théorème. Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$, il existe une unique permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que A s'écrit $A = T_1 P_\sigma T_2$ où T_1, T_2 matrices triangulaires supérieures inversibles et P_σ matrice de permutation associée à σ .

Démonstration.

Étape 1 : Remarques préliminaires.

Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i, j) . On note T_s l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles. On définit les matrices suivantes :

- Les matrices de transvection $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$. Elles sont dans T_s si $j > i$. Multiplier une matrice à gauche (resp. à droite) par $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$).
- Les matrices de dilatation $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$. Elles sont dans T_s si $\alpha \neq 0$. Multiplier une matrice à gauche (resp. à droite) par $D_i(\alpha)$ revient à effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \alpha C_i$).

Étape 2 : Construction de la décomposition de Bruhat.

Étant données les remarques précédentes, on cherche à effectuer des opérations élémentaires pour se ramener de A à une matrice de permutation. Comme A est inversible, sa première colonne n'est pas nulle et on peut poser $i_1 = \max\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{k1} \neq 0\}$. Pour tout $i \leq i_1$, on effectue $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{i_1 1}} L_{i_1}$: on annule ainsi toute la première colonne sauf le i_1 -ème coefficient. On effectue ensuite $C_1 \leftarrow \frac{1}{a_{i_1 1}} C_1$ de façon à ramener le i_1 -ème coefficient à 1. Enfin, pour tout $j \geq 2$, on effectue $C_j \leftarrow C_j - a_{i_1 j} C_1$ de façon à annuler toute la i_1 -ème ligne sauf le premier coefficient. On obtient une matrice de la forme

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \vdots & (*) & & & \\ 0 & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & & & & \\ \vdots & (*) & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Comme $A_1 \in GL_n(\mathbb{K})$, sa deuxième colonne n'est pas nulle, on peut donc définir $i_2 = \max\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{k2} \neq 0\}$. De plus $i_2 \neq i_1$ car $a_{i_1 2} = 0$. Comme précédemment, on peut mettre le coefficient $(i_2, 2)$ à 1 et mettre des 0 partout ailleurs sur la ligne et la colonne, sans affecter la première colonne. En répétant l'opération, on construit une suite injective (i_1, \dots, i_n) , et on obtient finalement la matrice $A_n = P_\sigma$ correspondant à la permutation $\sigma(k) = i_k$. Et comme A_n a été obtenue par multiplication par des éléments de T_s , en considérant l'inverse de ces matrices (toujours dans T_s) on a $T_1^{-1} A T_2^{-1} = P_\sigma$ soit $A = T_1 P_\sigma T_2$.

Étape 3 : Unicité.

Supposons qu'il existe $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ tels que $A = T_1 P_\sigma T_2 = T_1' P_{\sigma'} T_2'$. Alors, en posant $T = T_1'^{-1} T_1$ et $T' = T_2' T_2^{-1}$, on a $T P_\sigma = P_{\sigma'} T'$, avec $T, T' \in T_s$. Comme T' triangulaire supérieure inversible, on a $(T')_{jj} \neq 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Or, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(T')_{jj} = (P_{\sigma'} T')_{\sigma'(j)j} = (T P_\sigma)_{\sigma'(j)j} = T_{\sigma'(j)\sigma(j)}$. Mais comme T triangulaire supérieure, les coefficients (i, j) de $T P_\sigma$ sont nuls si $i > \sigma(j)$. On a donc nécessairement $\sigma'(j) \leq \sigma(j)$. De même, on a aussi $\sigma(j) \leq \sigma'(j)$, donc $\sigma(j) = \sigma'(j)$ et $\sigma = \sigma'$. \square

Application aux drapeaux

Définition. Soit E espace vectoriel de dimension n . On appelle drapeau complet de E toute suite de sous-espaces vectoriels $\{0_E\} = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E$. On note \mathcal{D} l'ensemble des drapeaux de E .

Théorème. $GL_n(\mathbb{K})$ agit transitivement sur \mathcal{D} , et \mathcal{D} est en bijection avec $GL_n(\mathbb{K})/T_s$.

Démonstration. Si $d = (E_0, \dots, E_n)$ est un drapeau et $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A \cdot d = (A(E_0), \dots, A(E_n))$ est un drapeau car A préserve la dimension (car inversible). On définit ainsi une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur \mathcal{D} . Elle est transitive : si on note (e_1, \dots, e_n) base de E et δ le drapeau formé par les espaces $(Vect(e_1, \dots, e_k))_k$, et qu'on considère $d = (E_0, \dots, E_n)$ un drapeau quelconque : par le théorème de la base incomplète, il existe (f_1, \dots, f_n)

base de E telle que pour tout $k, (f_1, \dots, f_k)$ base de E_k . Alors la matrice A qui vérifie $A \cdot e_i = f_i$ est inversible et vérifie $A \cdot \delta = d$, donc l'action est transitive. \mathcal{D} est donc en bijection avec $GL_n(\mathbb{K})/Stab(\delta)$. Mais clairement $A \cdot \delta = \delta \Leftrightarrow A \in T_s$, donc \mathcal{D} est en bijection avec $GL_n(\mathbb{K})/T_s$. \square

Théorème. $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ et l'action possède $n!$ orbites.

L'action s'identifie à celle de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $(GL_n(\mathbb{K})/T_s) \times (GL_n(\mathbb{K})/T_s)$. Soient $\overline{X}, \overline{Y} \in GL_n(\mathbb{K})/T_s$. En appliquant la décomposition de Bruhat à $X^{-1}Y$, on a $(\overline{X}, \overline{Y}) = X(\overline{I_n}, \overline{X^{-1}Y}) = X(\overline{I_n}, \overline{T_1 P_\sigma T_2}) = XT_1(\overline{T_1^{-1}}, \overline{P_\sigma T_2}) = XT_1(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$. Ainsi toute orbite contient un élément de la forme $(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$. De plus, σ est définie de manière unique : s'il existe $A \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}) = A \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_{\sigma'}}) = (\overline{A}, \overline{AP_{\sigma'}})$, alors $A \in T_s$ et il existe $T \in T_s$ tel que $AP_{\sigma'} = P_\sigma T$, et d'après ce qui précède, $\sigma = \sigma'$. Les orbites sont donc en bijection avec \mathcal{S}_n , donc il y en a $n!$.

Notes personnelles

Joli développement qui se recase bien, un peu long. Attention, c'est risqué de le faire dans la leçon 162.

Références

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS - ALGÈBRE 1, Cassini, p. 349.