

Développement : Critère de commandabilité de Kalman

Leçons : 221.

Théorème. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$. Pour $T > 0$, on note $\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_{pm}^0([0, T])$. On a équivalence entre :

(i). $(A^k b)_{0 \leq k \leq n-1}$ base de \mathbb{R}^n .

(ii). Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe $T > 0, u \in \mathcal{C}_T$ et $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et \mathcal{C}^1 par morceaux tq $x' = Ax + ub, x(0) = 0, x(T) = v$.

Démonstration.

Étape 1 : Solution du système linéaire.

Soient $T > 0, u \in \mathcal{C}_T, 0 = t_0 < \dots < t_p = T$ subdivision adaptée à u . On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = Ax + ub \\ x(0) = 0 \end{cases}$. La solution générale du problème homogène est donnée par $x_0(t) = e^{tA}C$. On résout par la méthode de variation de la constante : on pose $C(t) = e^{-tA}x(t)$ où x solution, et on calcule aux points de dérivabilité $C'(t) = e^{-tA}(x'(t) - Ax(t)) = u(t)e^{-tA}b$, et $C(0) = 0$. D'où $C(t) = \int_0^t u(s)e^{-sA}b ds$ et finalement $x(t) = e^{tA}C(t) = \int_0^t u(s)e^{(t-s)A}b ds$. L'intégrande étant continue par morceaux, x est continue, dérivable sauf en t_0, \dots, t_p et $x'(t) = Ax(t) + u(t)b$ donc comme u continue par morceaux, x est \mathcal{C}^1 par morceaux. Il y a donc une unique solution.

Étape 2 : Une deuxième condition aux limites.

Soit $\mathcal{A}_T = \{v \in \mathbb{R}^n, \exists u \in \mathcal{C}_T, x \text{ solution}, x(T) = v\}$. \mathcal{A}_T est l'image de \mathcal{C}_T par l'application linéaire $u \mapsto \int_0^T u(s)e^{(T-s)A}b ds$, c'est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Soit $E = \text{Vect}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b)$. Montrons que pour tout $T > 0, \mathcal{A}_T = E$.

\subseteq : soit $v \in \mathcal{A}_T$, soit $u \in \mathcal{C}_T$ tel que $v = \int_0^T u(s)e^{(T-s)A}b ds$. Soit $P = \chi_A - X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et par Cayley-Hamilton, on a $A^n = P(A)$, ainsi $A^n b \in E$. Par récurrence, on a pour tout $k \in \mathbb{N}, A^k b \in E$. Il s'ensuit que pour tous $k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}, \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} A^j b \in E$, et comme E est fermé dans \mathbb{R}^n (car de dimension finie), on a pour tout $t \in \mathbb{R}, e^{tA}b = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!} A^j b \in E$. On pose alors, pour $N \in \mathbb{N}^*, u_N = \frac{T}{N} \sum_{j=1}^N u\left(\frac{jT}{N}\right) \exp\left(\left(T - \frac{jT}{N}\right)A\right) b$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*, u_N \in E$ car combinaison linéaire d'éléments de E (d'après ce qui précède). De plus, $u_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^T u(s)e^{(T-s)A}b ds = v$, donc comme E fermé, $v \in E$.

\supseteq : Montrons que $\mathcal{A}_T^\perp \subset E^\perp$ pour le produit scalaire de \mathbb{R}^n . Soit $w \in \mathcal{A}_T^\perp$. On pose, pour $t \in [0, T], u(t) = \langle e^{(T-t)A}b, w \rangle$. u est continue sur $[0, T]$, le vecteur v correspondant est $v = \int_0^T \langle e^{(T-s)A}b, w \rangle e^{(T-s)A}b ds \in \mathcal{A}_T$.

Comme $w \in \mathcal{A}_T^\perp$, on a $0 = \langle v, w \rangle = \int_0^T \langle e^{(T-s)A}b, w \rangle^2 ds$, donc pour tout $s \in [0, T], \langle e^{(T-s)A}b, w \rangle = 0$. Pour $k \in \mathbb{N}$, en dérivant k fois cette égalité par rapport à s , il vient $\langle A^k e^{(T-s)A}b, w \rangle = 0$, d'où en prenant $s = T, \langle A^k b, w \rangle = 0$. Ainsi $w \in E^\perp$ ce qui prouve l'autre inclusion.

Étape 3 : Preuve de l'équivalence.

(i) \Rightarrow (ii) : On a $\forall T > 0, \mathcal{A}_T = E = \mathbb{R}^n$. Ainsi, si $v \in \mathbb{R}^n, v \in \mathcal{A}_T$ donc il existe u et x satisfaisant les conditions.

(ii) \Rightarrow (i) : Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe $T > 0$ tel que $v \in \mathcal{A}_T$. Or comme les \mathcal{A}_T sont tous égaux (à E), en particulier $v \in \mathcal{A}_1$. Donc $\mathcal{A}_1 = \mathbb{R}^n$ et $E = \mathbb{R}^n$, et $(A^k b)_{0 \leq k \leq n-1}$ base de \mathbb{R}^n . \square

Notes personnelles

Un développement que je trouve joli et original, même s'il ne se recase pas très bien. À noter que des textes de l'option B parlent de contrôle, le résultat peut donc être intéressant à connaître.

Références

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS ANALYSE 4, Cassini, p. 178.