

Développement : Cercle orthoptique d'une ellipse

Leçons : 180.

Théorème. *L'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une ellipse \mathcal{E} d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est un cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.*

Démonstration.

Étape 1 : Équation de la tangente.

\mathcal{E} admet pour paramétrage $x(t) = a \cos(t), y(t) = b \sin(t)$. La tangente au point $(x_0, y_0) = (a \cos(t_0), b \sin(t_0))$ est alors dirigée par $(x'(t_0), y'(t_0))$, elle admet donc une équation de la forme $-b \cos(t_0)x - a \sin(t_0)y + c = 0$, et comme la tangente passe par $(a \cos(t_0), b \sin(t_0))$, on a $c = ab(\cos(t_0)^2 + \sin(t_0)^2) = ab$, d'où la tangente admet pour équation $-b \cos(t_0)x - a \sin(t_0)y + ab = 0$, et en notant que $\cos(t_0) = x_0/a, \sin(t_0) = y_0/b$, l'équation se réécrit $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

Étape 2 : Équation tangentielle de l'ellipse.

Considérons une droite Δ d'équation $ux + vy = h$. Celle-ci est tangente à \mathcal{E} ssi il existe $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ tel que $ux + vy = h \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$. Ceci équivaut à $h \neq 0$ et $x_0 = \frac{a^2u}{h}, y_0 = \frac{b^2v}{h}$. Et un tel (x_0, y_0) est sur \mathcal{E} ssi $\frac{a^2u^2}{h^2} + \frac{b^2v^2}{h^2} = 1$, ie $a^2u^2 + b^2v^2 = h^2$. Réciproquement, tout triplet (u, v, h) non nul vérifiant cette relation définit une tangente à l'ellipse.

Étape 3 : Tangente passant par un point.

Soit $M(\alpha, \beta)$. Une droite passant par M a une équation de la forme $ux + vy = u\alpha + v\beta$. Elle est donc tangente à \mathcal{E} ssi $a^2u^2 + b^2v^2 = (u\alpha + v\beta)^2$, ie $(a^2 - \alpha^2)u^2 - 2\alpha\beta uv + (b^2 - \beta^2)v^2 = 0$.

Étape 4 : Cas $b^2 - \beta^2 \neq 0$.

Si $(u, v) \neq (0, 0)$ vérifie l'équation précédente, on a alors $u \neq 0$ (sinon on aurait $u = v = 0$) et la pente $m = -\frac{v}{u}$ vérifie $(b^2 - \beta^2)m^2 - 2\alpha\beta m + a^2 - \alpha^2 = 0$. Cette équation de degré 2 admet pour discriminant réduit $\alpha^2\beta^2 - (b^2 - \beta^2)(a^2 - \alpha^2) = a^2\beta^2 + \alpha^2b^2 - a^2b^2$ qui est positif ssi $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} \geq 1$: cela signifie que M doit être extérieur à l'ellipse (le cas où il est sur l'ellipse correspond à l'existence d'une racine double). Dans le cas où il est extérieur, les tangentes de pente m_1, m_2 sont orthogonales ssi $m_1m_2 = -1$, ce qui équivaut par le théorème de relations coefficients-racines à $\frac{a^2 - \alpha^2}{b^2 - \beta^2} = -1$, ou encore $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$. Réciproquement, tout point (α, β) de ce cercle avec $\beta \neq \pm b$ est extérieur à l'ellipse et convient.

Étape 5 : Cas $b^2 - \beta^2 = 0$.

Il y a alors une tangente verticale (correspondant à $u = 0$ et $v \neq 0$ quelconque). La seconde tangente est donnée par $(a^2 - \alpha^2)u - 2\alpha\beta v = 0$, qui est de pente $\frac{a^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta}$ (on a $\beta \neq 0$ et on peut supposer $\alpha \neq 0$ sans quoi M est sur l'ellipse). Les deux droites sont orthogonales ssi $a^2 - \alpha^2 = 0$. On vérifie alors à nouveau que $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$ et on récupère bien les 4 points manquants du cercle précédent. \square

Références

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS ALGÈBRE 3, Cassini, p. 276.