

## Développement : Automorphismes de $\mathbb{K}(X)$

**Leçons** : 140.

**Théorème.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Les automorphismes d'algèbre de  $\mathbb{K}(X)$  sont les  $\Phi_{a,b,c,d} : G \mapsto G \left( \frac{aX+b}{cX+d} \right)$  tels que  $a, b, c, d \in \mathbb{K}, ad - bc \neq 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  automorphisme de  $\mathbb{K}(X)$ .

Étape 1 :  $\exists F \in \mathbb{K}(X), \varphi : G \mapsto G \circ F$ .

Soit  $F = \varphi(X)$ , soit  $P \in \mathbb{K}[X], P = \sum_{k=0}^n p_k X^k$ . On a  $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n p_k \varphi(X^k) = \sum_{k=0}^n p_k \varphi(P)^k = \sum_{k=0}^n p_k F^k = P \circ F$ .

Par suite, si  $G = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ , on a  $\varphi(G) = \varphi\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{\varphi(P)}{\varphi(Q)} = \frac{P \circ F}{Q \circ F} = G \circ F$ .

Réciproquement, on a clairement  $\Phi_F \begin{cases} \mathbb{K}(X) & \rightarrow \mathbb{K}(X) \\ G & \mapsto G \circ F \end{cases}$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}(X)$ .

Étape 2 : Conditions sur  $F$  pour que  $\Phi_F$  automorphisme.

Si  $\Phi_F$  automorphisme, il est surjectif, il existe  $G \in \mathbb{K}(X)$  tel que  $G \circ F = \Phi_F(G) = X$ .

On écrit  $F = \frac{A}{B}, G = \frac{P}{Q}$  comme fractions irréductibles,  $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k, Q = \sum_{k=0}^m q_k X^k$ .

On a, par hypothèse,  $P \circ F = X(Q \circ F)$  soit  $\sum_{j=0}^n p_j F^j = X \sum_{k=0}^m q_k F^k \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n p_j \frac{A^j}{B^j} = X \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{B^k}$ .

On note  $N = \max(n, m)$ . On a, en multipliant de chaque côté par  $B^N$ ,  $\sum_{j=0}^n p_j A^j B^{N-j} = X \sum_{k=0}^m q_k A^k B^{N-k}$ .

$A$  divise tous les termes de cette égalité sauf ceux correspondant à  $j = 0$  et  $k = 0$ . Ainsi  $A$  divise  $(p_0 - q_0 X) B^N$ .  
 $A$  premier avec  $B$ , donc avec  $B^N$ , donc en vertu du théorème de Gauss  $A$  divise  $(p_0 - q_0 X)$ . Et  $(p_0, q_0) \neq (0, 0)$   
 (sinon  $\frac{P}{Q}$  non irréductible) ainsi  $\deg(A) \leq 1$ .

De même,  $B$  divise tous les termes de l'égalité sauf ceux correspondant à  $j = N, k = N$ . Distinguons trois cas :

- Si  $N = m = n$ , alors  $B$  divise  $(p_N - q_N X)$  et  $q_N \neq 0$  (coefficient dominant de  $Q$ ).
- Si  $N = m > n$ , alors  $B$  divise  $q_m X \neq 0$  (même argument).
- Si  $N = n > m$ , alors  $B$  divise  $p_n \neq 0$  (coefficient dominant de  $P$ ).

On a donc  $\deg(B) \leq 1$ .

*Rmq* : On aurait aussi pu utiliser un argument de symétrie, en utilisant que  $G \mapsto G(1/X)$  automorphisme de  $\mathbb{K}(X)$ .

Ainsi, il existe  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$  tels que  $F = \frac{aX+b}{cX+d}$ , et  $F$  non constant, donc  $ad - bc \neq 0$ .

Étape 3 : Réciproque.

Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{K}, ad - bc \neq 0$ , montrons que  $\Phi_{a,b,c,d}$  automorphisme.

On a  $\Phi_{1,0,0,1} = Id_{\mathbb{K}(X)}$ , et si  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{K}$ , on a  $\Phi_{a,b,c,d} \circ \Phi_{a',b',c',d'} = \Phi_{e,f,g,h}$  où

$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ . Donc en prenant  $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ , on a  $\Phi_{a',b',c',d'} = \Phi_{a,b,c,d}^{-1}$ .

Ainsi  $\Phi_{a,b,c,d}$  est un automorphisme. □

### Compléments

On a prouvé ici qu'il existe un morphisme  $\varphi : GL_2(\mathbb{K}) \rightarrow Aut(\mathbb{K}(X))$ . Son noyau est donné par  $\mathbb{K}^* I_2 = Z(GL_2(\mathbb{K}))$ .  
 Il se factorise donc en un isomorphisme  $GL_2(\mathbb{K})/Z(GL_2(\mathbb{K})) \simeq PGL_2(\mathbb{K}) \rightarrow Aut(\mathbb{K}(X))$ .

### Références

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS - ALGÈBRE 1, Cassini, p. 224.