

Développement : Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible

Leçons : 207, 223, 243.

Théorème (Abel).

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R \geq 1$, telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge. On note f la somme de la série sur le disque unité. Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$, on pose $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \theta \in [-\alpha, \alpha], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$.

Alors $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_\alpha}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Démonstration.

Étape 1 : Transformation d'Abel.

On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, et pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$, $R_N = S - S_N$. On a, pour $n \geq 1$, $a_n = R_{n-1} - R_n$.

Soient $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{n=0}^N a_n z^n - S_N = \sum_{n=1}^N (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^N R_n(z^n - 1)$
 $= \sum_{n=1}^{N-1} R_n(z^{n+1} - z_n) + R_0(z - 1) - R_N(z^N - 1) = \sum_{n=1}^{N-1} R_n(z^{n+1} - z_n) - R_N(z^N - 1) = (z - 1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N - 1)$.

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $f(z) - S = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \right) (z - 1)$.

Étape 2 : Preuve du théorème.

Soit $\varepsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|R_n| < \varepsilon$. D'après l'étape 1, on a

$$|f(z) - S| \leq |z - 1| \left| \sum_{n=0}^N R_n z^n \right| + \varepsilon |z - 1| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \right) \leq |z - 1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right) + \varepsilon \frac{|z - 1|}{1 - |z|}.$$

Soit $z \in \Delta_\alpha$, il existe $\rho > 0, \theta \in [-\alpha, \alpha]$ tel que $z = 1 - \rho e^{i\theta}$. On a $|z|^2 = \rho^2 - 2\rho \cos(\theta) + 1$, et si $\rho \leq \cos(\alpha)$,
 $\frac{|z - 1|}{1 - |z|} = \frac{|z - 1|}{1 - |z|^2} (1 + |z|) = \frac{\rho}{2\rho \cos(\theta) - \rho^2} (1 + |z|) \leq \frac{2}{2 \cos(\theta) - \rho} \leq \frac{2}{2 \cos(\alpha) - \cos(\alpha)} = \frac{2}{\cos(\alpha)}$.

Soit $\delta > 0$ tel que $\delta \sum_{n=0}^N |R_n| < \varepsilon$, alors si $z \in \Delta_\alpha$ et $|z - 1| \leq \min(\delta, \cos(\alpha))$, on a $|f(z) - S| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\alpha)} \right)$, d'où le résultat. \square

Théorème (taubérien faible). Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ série entière de rayon de convergence 1, soit f sa somme. On suppose

que $S := \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} f(z)$ existe, et que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Démonstration.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Alors pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0, 1[$, $S_n - f(x) = \sum_{k=1}^n a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

Comme $1 - x^k = (1 - x) \sum_{j=0}^{k-1} x^j \leq k(1 - x)$, on a $|S_n - f(x)| \leq (1 - x) \sum_{k=1}^n k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k$ d'où si M majorant

de la suite $(k|a_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ (qui existe car la suite tend vers 0), on a $|S_n - f(x)| \leq Mn(1 - x) + \frac{1}{n(1 - x)} \sup_{k > n} k|a_k|$.

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On a alors $\left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leq M\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{k > n} k|a_k|$. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$, $\sup_{k > N_0} k|a_k| < \varepsilon^2$.

Alors pour $n \geq N_0$, $\left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leq (M + 1)\varepsilon$.

Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} S$, il existe $N_1 \geq N_0$, $\forall n \geq N_1$, $\left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| < \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq N_1$,

$|S - S_n| \leq \left| S - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| + \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leq \varepsilon + (M + 1)\varepsilon = (M + 2)\varepsilon$, d'où le résultat. \square

Références

X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses, p. 252.