

264. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Introduction : Les variables aléatoires discrètes sont historiquement les premiers exemples de lois de probabilité, introduites dans le cadre de l'étude des jeux de hasard. Elles interviennent aujourd'hui encore très largement en modélisation.

On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1 Loi et moments d'une variable aléatoire discrète

Définition 1. On appelle variable aléatoire discrète une application mesurable $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ où E est un ensemble au plus dénombrable. On prendra ici $E \subseteq \mathbb{N}$.

Proposition 2. La loi de X est alors caractérisée par les valeurs $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 3. La fonction de répartition de X est une fonction en escalier donnée par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(X = k)$.

Proposition 4. L'espérance de X est donnée par $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ (sous réserve que la série converge).

Théorème 5 (transfert). Si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable positive ou bornée, on a $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)\mathbb{P}(X = k)$.

Proposition 6. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si $\forall k, n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = k)$.

Proposition 7. Si la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 \mathbb{P}(X = k)$ converge, la variance de X est donnée par $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$.

2 Exemples de lois discrètes

2.1 Loi de Bernoulli

Il s'agit de la loi du jeu de pile ou face.

Définition 8. Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$, si $\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Proposition 9. On a alors $\mathbb{E}[X] = p, \text{Var}(X) = p(1 - p)$.

2.2 Loi binomiale

Il s'agit de la loi du nombre de pile lors de n lancers de pièce.

Définition 10. Soient $p \in [0, 1], n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n, p , et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, si $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Proposition 11. On a alors $\mathbb{E}[X] = np, \text{Var}(X) = np(1 - p)$.

Proposition 12. Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes et toutes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

2.3 Loi géométrique

Il s'agit de la loi du premier pile lors d'une suite de lancers de pièce.

Définition 13. Soit $p \in [0, 1]$. On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p , et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$, si pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

Proposition 14. On a alors $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ et $\text{Var}(X) = \frac{1}{p^2}$.

Proposition 15. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors la variable $T = \inf\{k \in \mathbb{N}^*, X_k = 1\}$ suit une loi $\mathcal{G}(p)$.

2.4 Loi de Poisson

Il s'agit d'une loi modélisant un nombre d'occurrences d'un événement sur une durée fixée.

Définition 16. Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ , et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Proposition 17. On a alors $\mathbb{E}[X] = \lambda$ et $\text{Var}(X) = \lambda$.

Théorème 18 (événements rares). Soit $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit X_n v.a. de loi $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. Alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

3 Propriétés des variables discrètes

3.1 Fonction génératrice

Définition 19. Soit X variable aléatoire discrète. On définit sa fonction génératrice par $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)s^k$.

Proposition 20. Cette série entière a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Elle est continue sur $[0, 1]$ et \mathcal{C}^∞ sur $]0, 1[$.

Exemple 21. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $G_X(s) = (1 - p + ps)^n$.
Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$.

Corollaire 22. La fonction génératrice caractérise la loi de X .

Théorème 23. X admet un moment d'ordre p , si et seulement si, G_X est p fois dérivable en 1, et alors $G_X^{(p)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-p+1)]$.

Corollaire 24. Si X, Y sont deux variables aléatoires discrètes ayant des moments de tous ordres égaux, alors X, Y ont même loi.

3.2 Conditionnement

Proposition 25. Soit (X, Y) couple de variables aléatoires de loi jointe connue. Les lois marginales s'obtiennent par $\mathbb{P}(X = j) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = j, Y = k)$.

Les lois marginales ne suffisent pas en général à déterminer la loi jointe.

Contre-exemple 26. Soit X variable aléatoire vérifiant $\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = -1) = 1 - p, p \in]0, 1[$. Alors (X, X) et $(X, -X)$ ont mêmes lois marginales mais pas les mêmes lois jointes.

Définition 27. Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(X = j) > 0$. On appelle loi conditionnelle de Y sachant $X = j$ la probabilité définie par $\mathbb{P}_{|X=j}(Y = k) = \mathbb{P}(Y = k | X = j)$.

Proposition 28. On a alors

- Si $\mathbb{P}(X = j) > 0, \mathbb{P}_{|X=j}(Y = k) = \frac{\mathbb{P}(X = j, Y = k)}{\mathbb{P}(X = j)}$
- Si $\mathbb{P}(X = j) > 0, \mathbb{P}(X = j, Y = k) = \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = k | X = j)$ (et 0 sinon).

La connaissance d'une loi marginale et d'une loi conditionnelle donne donc la loi du couple.

Définition 29. Si Y est intégrable, l'espérance conditionnelle de Y sachant $X = j$ est alors donnée par $\mathbb{E}[Y | X = j] = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(Y = k | X = j)$, et l'espérance conditionnelle de Y sachant X par $\mathbb{E}[Y | X] = \psi(X)$ où $\psi(x) = \mathbb{E}[Y | X = x]$.

3.3 Indépendance

Proposition 30. On a équivalence entre :

- X, Y indépendantes
- $\forall j, k, \mathbb{P}(X = j, Y = k) = \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = k)$
- $\forall j$ tel que $\mathbb{P}(X = j) > 0, \mathbb{P}(Y = k | X = j) = \mathbb{P}(Y = k)$.

Proposition 31. Si X, Y indépendantes, on a pour tout $j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X + Y = j) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = j - k)\mathbb{P}(Y = k)$, et pour tout $s \in [0, 1], G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$.

Application 32. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda), Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

4 Applications

4.1 Processus de branchement

Théorème 33 (Galton-Watson). On considère l'évolution d'une population, dont on note Z_n le nombre d'individus de la génération n . On suppose que chaque individu i de la génération n a $Y_{n,i}$ enfants. Les $(Y_{n,i})_{n,i}$ sont supposées *iid*, on note $m = \mathbb{E}[Y]$ leur moyenne et pour tout $k, p_k = \mathbb{P}(Y = k)$. On suppose $0 < p_0 < 1$, et $Z_0 = 1$. Alors :

- Si $m \leq 1$, la population s'éteint presque sûrement.
- Si $m > 1$, la population s'éteint avec une probabilité non nulle.

4.2 Marches aléatoires

Définition 34. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, soit (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{R}^d . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$. On considère la marche aléatoire définie par $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + X_n$.

Théorème 35 (Pólya).

- Si $d \leq 2$, la marche aléatoire est récurrente, i.e. $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 1$.
- Si $d \geq 3$, la marche aléatoire est transiente : $\mathbb{P}(\|S_n\| \rightarrow \infty) = 1$.

Théorème 36 (du scrutin). Lors d'une élection, le candidat A a obtenu α voix et le candidat B a obtenu β voix avec $\alpha > \beta$. La probabilité que A ait été en tête tout au long du scrutin vaut $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$.

Développements

- Théorème de Galton-Watson
- Récurrence de la marche aléatoire sur \mathbb{Z} et \mathbb{Z}^2

Références

- [1] M. Cottrell et al., EXERCICES DE PROBABILITÉS, Cassini.
- [2] S. Méléard, ALÉATOIRE, École Polytechnique.