

261. Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Introduction : Lorsqu'il n'est pas possible de caractériser la loi par la densité ou la fonction de répartition, ce sont des outils puissants qui donnent de nombreuses informations.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d .

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Fonction caractéristique

Définition 1. La fonction caractéristique de X est définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{i\langle u, X \rangle}].$$

Proposition 2. On a pour tout u , $|\phi_X(u)| \leq 1$, $\phi_X(0) = 1$ et $\phi_X(-u) = \overline{\phi_X(u)}$. De plus, si $a \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$, on a $\phi_{a+AX}(u) = e^{i\langle u, a \rangle} \phi_X(tAu)$.

Exemple 3. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, on a $\phi_X(u) = (pe^{iu} + 1 - p)^n$.

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, on a $\phi_X(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu}$.

Remarque 4. Si X variable aléatoire réelle discrète de fonction génératrice G_X , on a $\phi_X(u) = G_X(e^{iu})$. Si X variable aléatoire réelle de densité f , alors ϕ_X est la transformée de Fourier de f .

Théorème 5. Deux variables aléatoires X, Y à valeurs dans \mathbb{R}^d ont même fonction caractéristique ssi elles ont même loi.

Théorème 6 (Inversion de Fourier). Si $\varphi_X \in L^1(\lambda)$, alors X admet une densité f_X donnée par $\forall t \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, u \rangle} \varphi_X(u) du$.

Application 7. Si X suit une loi de Cauchy, de densité $f : x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, alors $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.

1.2 Transformée de Laplace

Soit X variable aléatoire réelle.

Définition 8. Sa transformée de Laplace est définie par $L_X(t) = \mathbb{E}[e^{tx}]$, définie pour tout t tel que $\mathbb{E}[e^{tX}] < +\infty$. On notera U_X son intervalle de définition.

Proposition 9. L_X est toujours définie en 0 et $L_X(0) = 1$. De plus, si X est bornée, L_X est définie et continue sur \mathbb{R} .

Théorème 10. Si X, Y sont deux variables aléatoires dont les transformées de Laplace sont définies et égales sur un ouvert contenant 0, alors elles ont même loi.

Contre-exemple 11. Si X suit une loi de Cauchy, alors L_X n'est définie qu'en 0.

Exemple 12. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, on a $U_X = \mathbb{R}$ et $L_X(t) = (pt + 1 - p)^n$. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, on a $U_X =] - \infty, \lambda[$ et $L_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$.

Remarque 13. Si X variable aléatoire réelle discrète de fonction génératrice G_X , on a $L_X(t) = G_X(e^t)$. De plus, on a formellement $\phi_X(u) = L_X(iu)$.

Application 14. Soient $a, \lambda > 0$. On considère une variable aléatoire X de densité donnée par $f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On a $U_X =] - \infty, \lambda[$, $L_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a$ et $\phi_X(u) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - iu}\right)^a$.

2 Premières applications

2.1 Moments et régularité

Supposons X variable aléatoire réelle.

Théorème 15. Si X admet une transformée de Laplace sur un ouvert contenant 0, disons sur $] - s, s[$ avec $s > 0$, alors :

— Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}[|X|^k] < +\infty$.

— $\forall t \in] - s, s[$, $L_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}[X^k]}{k!} t^k$.

— L_X est de classe \mathcal{C}^∞ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g^{(k)}(0) = \mathbb{E}[X^k]$.

Remarque 16. La loi de X est alors caractérisée par ses moments.

Théorème 17. S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{E}[|X|^n] < +\infty$, alors φ_X est de classe \mathcal{C}^n , et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.

Application 18. Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors $\varphi_X(u) = e^{-u^2/2}$.

Corollaire 19. Si φ_X est analytique, alors la loi de X est caractérisée par ses moments.

Contre-exemple 20. On pose $f(x) = \frac{1}{2\pi x} e^{-\ln(x)^2/2} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$, et pour $a \in [-1, 1]$, $f_a(x) = (1 + a \sin(2\pi \ln(x))) f(x)$. Soient X, X_a de densités respectives f, f_a . Alors X, X_a ont les mêmes moments mais ne sont pas de même loi.

2.2 Indépendance

Théorème 21. Soit (X, Y) vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 . X et Y sont indépendantes, ssi, $\varphi_{(X, Y)} = \varphi_X \otimes \varphi_Y$.

Application 22. Si (X, Y) vecteur gaussien, X et Y sont indépendantes ssi $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Théorème 23. Si X, Y variables aléatoires réelles indépendantes, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Application 24. Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2), Y \sim \mathcal{N}(m', \sigma'^2)$ alors $X + Y \sim \mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$.

Contre-exemple 25. Si X suit une loi de Cauchy, on a $\varphi_{X+X}(t) = \varphi_X(t)^2$.

Théorème 26. Si X, Y admettent une transformée de Laplace sur un ouvert contenant 0, et si elles sont indépendantes, alors $X + Y$ admet une transformée de Laplace sur un ouvert contenant 0 et $L_{X+Y}(t) = L_X(t)L_Y(t)$.

Contre-exemple 27. Soit $E = \{(x, y) \in [0, 1]^2, \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\} \cup \{(x, y) \in [0, 1]^2, x \leq y \leq x + \frac{1}{2}\}$. Soit (X, Y) de loi jointe de densité $2 \cdot \mathbf{1}_E(X, Y)$. Alors $L_{X+Y} = L_X L_Y$ mais X, Y non indépendantes.

2.3 Grandes déviations

Proposition 28 (Chernov). Si X admet une transformée de Laplace, on a $\forall x > 0, \mathbb{P}(X > x) \leq \inf_{u \geq 0} e^{-ux} L_X(u)$.

Théorème 29 (Hoeffding). Soit $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires réelles indépendantes, telle qu'il existe deux suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ de réels pour lesquelles

$\forall n, \mathbb{P}(a_n \leq X_n \leq b_n) = 1$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Alors, pour tous $n \in \mathbb{N}^*, x > 0$, on

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| > x) \leq 2 \exp \left(-2x^2 \left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 \right)^{-1} \right).$$

Exemple 30. Si les X_n suivent des lois de Bernoulli de paramètre p , on a

$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| > x) \leq 2e^{-2x^2/n}$. L'inégalité de Tchebychev donne

$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| > x) \leq \frac{np(1-p)}{x^2}$: Hoeffding est donc plus précise.

3 Convergence en loi

3.1 Définition et caractérisation

Définition 31. Soient $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires réelles, X variable aléatoire réelle. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X , et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X)]$.

Proposition 32. Si les $(X_n)_n$ et X ont respectivement pour fonctions de répartition les $(F_n)_n$ et F , alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(x)$ en tout point x où F est continue.

Théorème 33 (Lévy). $(X_n)_n$ converge en loi vers X , si et seulement si, $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers φ_X .

Exemple 34. Si $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ converge vers $p \in [0, 1]$, alors la loi $\mathcal{B}(n, p_k)$ converge en loi vers la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

3.2 Théorème central limite

Théorème 35 (central limite). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite de variables aléatoires iid dans L^2 . Alors $\sqrt{\frac{n}{\text{Var}(X_1)}} \left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1] \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, 1)$

Application 36. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ suite de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{B}(\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est inconnu. On définit, pour $n \geq 1$, la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Alors

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\theta \in \left[\bar{X}_n - \frac{q_\alpha}{\sqrt{2n}}, \bar{X}_n + \frac{q_\alpha}{\sqrt{2n}} \right] \right) \geq 1 - \alpha$, où q_α est le quantile d'ordre α de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Développements

- Étude de la loi Gamma.
- Théorème central limite et intervalles de confiance.

Références

- [1] P. Barbe, M. Ledoux, PROBABILITÉ, EDP Sciences.
- [2] D. Foata, J. Franchi, A. Fuchs, CALCUL DES PROBABILITÉS, Dunod.

[3] O. Garet, A. Kurtzmann, DE L'INTÉGRATION AUX PROBABILITÉS, Ellipses.

[4] S. Méléard, ALÉATOIRE, École Polytechnique.