

## 260. Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

**Introduction** : La notion d'espérance a été introduite tôt en probabilités lors de l'étude des jeux de hasard. Sa formalisation a permis de donner un sens à l'idée intuitive de loi des grands nombres. La variance permet elle de quantifier la dispersion par rapport à la moyenne.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.  $\mathbb{R}$  sera muni de la tribu borélienne.

### 1 Moments d'une variable aléatoire

#### 1.1 Moment d'ordre 1

**Définition 1.** Une *variable aléatoire* sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  est une application mesurable à valeurs dans un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ .

**Définition 2.** Soit  $X$  variable aléatoire réelle.

On dit qu'elle admet un moment d'ordre 1 si elle est intégrable par rapport à  $\mathbb{P}$ . On définit alors son espérance  $\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$ .

**Exemple 3.** Si  $A \in \mathcal{A}$  et  $X = \mathbb{1}_A$ , alors elle admet une espérance  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(A)$ .

**Théorème 4** (de transfert). Si  $X$  variable aléatoire à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$ , soit  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable telle que  $\phi(X)$  intégrable. Alors  $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_E \phi(x) d\mathbb{P}_X$ .

En particulier, si  $X$  v.a. réelle,  $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X$ .

**Application 5.** Si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ .

Si  $X$  admet une densité  $f$  par rapport à la mesure de Lebesgue, on a  $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x) d\lambda(x)$ .

**Exemple 6.** Espérances de lois classiques (voir annexe).

**Contre-exemple 7.** La loi de Cauchy, de densité  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ , n'admet pas de moment d'ordre 1.

**Proposition 8** (Inégalité de Markov). Soit  $X$  variable aléatoire réelle. Alors pour tout  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{P}(X > \delta) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\delta}$ .

**Proposition 9** (Inégalité de Jensen). Soit  $X$  variable aléatoire réelle, soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe. Alors  $\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$ .

**Proposition 10.** Si  $X, Y$  sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, intégrables et telles que  $XY$  intégrable, alors  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ .

**Contre-exemple 11.** Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{B}(1/2)$ ,  $Y = 1 - X$ , on a  $\mathbb{E}[XY] = 0 \neq \frac{1}{4} = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ .

**Définition 12.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires. On dit qu'elle converge en loi vers  $X$  si pour tout  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée,  $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$ .

#### 1.2 Moments d'ordre supérieur

**Définition 13.** Soit  $X$  variable aléatoire réelle,  $p \in \mathbb{N}^*$ , on dit que  $X$  admet un moment d'ordre  $p$  si  $X^p$  est intégrable.

**Proposition 14** (Hölder). Soient  $p, q > 1$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , soient  $X, Y$  telles que  $X^p, Y^q$  aient un moment d'ordre 1. Alors  $XY$  a un moment d'ordre 1, et  $\mathbb{E}[XY] \leq \mathbb{E}[X^p]^{1/p} \mathbb{E}[Y^q]^{1/q}$ .

**Corollaire 15.** Si  $X$  admet un moment d'ordre  $p$ , alors pour tout  $q \leq p$ ,  $X$  admet un moment d'ordre  $q$ .

**Proposition 16.** Soit  $X$  variable aléatoire réelle positive.

Alors  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{E}[X^p] = \int_0^{+\infty} pt^{p-1} \mathbb{P}(X > t) dt$ .

**Définition 17.** Si  $X$  admet un moment d'ordre 2, on définit sa variance par  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ . Si  $X, Y \in L^2$ , on définit leur covariance par  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ .

**Proposition 18.** Soient  $X, Y \in L^2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . On a  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ ,  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$ .

**Exemple 19.** Variances de lois classiques (voir annexe).

**Proposition 20.** Si  $X, Y$  indépendantes, alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Contre-exemple 21.** Si  $X$  suit une loi uniforme sur  $[-1, 1]$ ,  $\text{Cov}(X, |X|) = 0$  mais  $X, |X|$  non indépendantes.

**Proposition 22** (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Soit  $X$  v.a. réelle admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \delta) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\delta^2}$ .

## 2 Transformées classiques

### 2.1 Fonction génératrice

**Définition 23.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On définit sa fonction génératrice  $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)s^k$ .

**Proposition 24.** Cette série entière a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Elle est continue sur  $[0, 1]$  et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 1[$ .

**Corollaire 25.** La fonction génératrice caractérise la loi de  $X$ .

**Exemple 26.** Si  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ,  $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$ .

**Théorème 27.**  $X$  admet un moment d'ordre  $p$ , si et seulement si,  $G_X$  est  $p$  fois dérivable en 1, et alors  $G_X^{(p)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-p+1)]$ .

### 2.2 Fonction caractéristique

**Définition 28.** Soit  $X$  variable aléatoire réelle. On définit sa fonction caractéristique par  $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ .

**Proposition 29.**  $\phi_X$  est continue, de module inférieur à 1.

**Théorème 30.**  $\phi_X$  caractérise la loi de  $X$ .

**Exemple 31.** Si  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$ .

**Proposition 32.** Si  $X, Y$  sont deux variables indépendantes,  $\phi_{X+Y} = \phi_X\phi_Y$ .

**Théorème 33** (Lévy). Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de variables aléatoires.

- Si  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$ , alors  $(\phi_{X_n})_n$  converge simplement vers  $\phi_X$ .
- Si  $(\phi_{X_n})_n$  converge simplement vers  $\phi$  continue en 0, alors  $\phi$  est la fonction caractéristique d'une variable  $X$  et  $X_n$  converge en loi vers  $X$ .

### 2.3 Transformée de Laplace

**Définition 34.** Soit  $X$  variable aléatoire réelle. On définit sa transformée de Laplace par  $L_X(t) = \mathbb{E}[e^{-tX}]$ .

La transformée de Laplace est définie sur un intervalle contenant 0 (possiblement réduit à  $\{0\}$ ).

**Exemple 35.** Si  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}^*$  avec  $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = -n) = \frac{3}{\pi n^2}$ , la transformée de Laplace n'est définie qu'en 0.

**Proposition 36.** Deux variables aléatoires ayant même transformée de Laplace sur un voisinage de 0 ont même loi.

## 3 Applications

### 3.1 Théorèmes limites

**Proposition 37** (Loi des grands nombres). Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de variables aléatoires iid dans  $L^2(\mathbb{P})$ . Alors  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[X_1]$  dans  $L^1$  et en probabilité.

**Application 38** (Monte-Carlo). Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de variables aléatoires iid de loi uniforme sur  $[-1, 1]^d$ , soit  $f$  mesurable bornée sur  $[-1, 1]^d$ .

Alors  $\frac{2^d}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{[-1, 1]^d} f(x) dx$  presque sûrement.

**Théorème 39** (central limite). Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  suite de variables aléatoires iid dans  $L^2$ . Alors  $\sqrt{\frac{n}{\text{Var}(X_1)}} \left( \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1] \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

**Application 40.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  suite de variables aléatoires iid de loi  $\mathcal{B}(\theta)$  où  $\theta \in \mathbb{R}$  est inconnu. On définit, pour  $n \geq 1$ , la moyenne empirique  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ . Alors

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \theta \in \left[ \bar{X}_n - \frac{q_\alpha}{\sqrt{2n}}, \bar{X}_n + \frac{q_\alpha}{\sqrt{2n}} \right] \right) \geq 1 - \alpha$ , où  $q_\alpha$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

### 3.2 Le problème des moments

En général, les moments ne caractérisent pas la loi d'une variable aléatoire.

**Contre-exemple 41.** On pose  $f(x) = \frac{1}{2\pi x} e^{-\ln(x)^2/2} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$ , et pour  $a \in [-1, 1]$ ,  $f_a(x) = (1 + a \sin(2\pi \ln(x)))f(x)$ . Soient  $X, X_a$  de densités respectives  $f, f_a$ . Alors  $X, X_a$  ont les mêmes moments mais ne sont pas de même loi.

**Proposition 42.** Les moments caractérisent la loi dans le cas des variables aléatoires discrètes.

**Proposition 43.** Soit  $X$  possédant une transformée de Laplace sur un voisinage ouvert de 0. On a alors  $L_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^k]}{k!} t^k$ , et la loi de  $X$  est entièrement caractérisée par ses moments.

**Proposition 44.** Si  $X, Y$  sont deux variables aléatoires réelles bornées ayant mêmes moments, alors elles ont même loi.

### 3.3 Théorème de Weierstrass polynomial

**Définition 45.** Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ .

On définit son *module de continuité* par  $w_f(h) = \sup_{|x-y|<h} |f(x) - f(y)|$ .

**Théorème 46.** Pour  $p \in [0, 1]$ , soient  $X_1(p), \dots, X_n(p)$  iid suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . On pose  $S_n(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p)$ . On pose enfin pour tout

$p \in [0, 1]$ ,  $B_n(p) = \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{S_n(p)}{n} \right) \right]$ .  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions polynomiales

qui converge uniformément vers  $f$ , et on a  $\|B_n - f\|_\infty \leq \frac{3}{2} w_f \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ .

## Annexe

Espérance et variance de lois classiques :

Loi	Espérance	Variance
$\mathcal{B}(p)$	$p$	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n, p)$	$np$	$np(1-p)$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda$	$\lambda$
$\mathcal{U}([a, b])$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$m$	$\sigma^2$

## Développements

- Théorème central limite
- Théorème de Weierstrass polynomial

## Références

- [1] P. Barbe, M. Ledoux, *PROBABILITÉ*, EDP Sciences.
- [2] M. Cottrell et al., *EXERCICES DE PROBABILITÉS*, Cassini.
- [3] S. Méléard, *ALÉATOIRE*, École Polytechnique.