

253. Utilisation de la notion de convexité en analyse.

1 Généralités et premières applications

1.1 Parties convexes

Définition 1. Soit C une partie d'un evn E . On dit qu'elle est convexe si $\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], (1-t)x + ty \in C$.

Remarque 2. C est stable par combinaisons convexes : pour tous $x_1, \dots, x_n \in C, \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in C$.

Exemple 3. La boule d'un espace normé est convexe, la sphère ne l'est pas.

Exemple 4. Les convexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

Définition 5. On appelle enveloppe convexe d'une partie A d'un espace vectoriel la plus petite partie convexe contenant A . On la note $\text{Conv}(A)$.

Proposition 6. $\text{Conv}(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A .

Théorème 7 (Carathéodory). Si E espace de dimension $n, A \subseteq E$, alors $\text{Conv}(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de $n+1$ éléments de A .

Application 8. Dans un espace normé de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

Proposition 9. Si E de dimension finie, $v \in \mathcal{L}(E), K$ compact convexe de E stable par v , alors v a un point fixe dans K .

Proposition 10. Sous les mêmes hypothèses, si H sous-groupe compact de $GL(E)$ dont tous les éléments stabilisent K , alors tous les éléments de H ont un point fixe commun dans K .

Application 11. Si G sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R}),$ il existe $q \in Q^{++}(\mathbb{R}), G \subseteq O(q)$.

1.2 Applications convexes

Définition 12. Soient E un espace normé, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. f est dite convexe si $\forall x, y \in E, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$. On parle de stricte convexité lorsque l'inégalité est stricte dès lors que $x \neq y$, et de concavité si $-f$ est convexe.

Proposition 13. f est convexe ssi son épigraphe est convexe.

Proposition 14. Soit I intervalle ouvert de \mathbb{R} , soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors si f convexe, f est continue.

Proposition 15. Soit I intervalle de \mathbb{R} , soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. f convexe ssi $\forall y \in I, \tau_x \begin{cases} I \setminus \{y\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \end{cases}$ est croissante.

Corollaire 16. Si f dérivable, f convexe ssi f' croissante.

Exemple 17. \exp est convexe, \log est concave.

Application 18 (Galton-Watson). On considère un processus défini par $Z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n,i}$ où $(Y_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid à valeurs dans \mathbb{N} , dont on note g la fonction génératrice. g est convexe. Si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = 0\}$

et $m = \mathbb{E}[Y]$, on a :

- Si $m \leq 1, \mathbb{P}(A) = 1$.
- Si $m > 1$, on a $0 < \mathbb{P}(A) < 1$.

Proposition 19. Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), f$ est convexe ssi $\forall a \in \mathbb{R}^n, d^2 f(a)$ est positive.

2 Inégalités de convexité

2.1 Inégalités classiques

Théorème 20 (Jensen). Si f fonction convexe, alors pour toute combinaison linéaire convexe $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, on a $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

Lemme 21. $\log : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement concave.

Application 22 (Inégalité arithmético-géométrique). $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+,$ on a $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}$.

Application 23. Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R}),$ soit $\alpha \in [0, 1]$. Alors $\det((1-\alpha)A + \alpha B) \geq \det(A)^{1-\alpha} \det(B)^\alpha,$ avec inégalité stricte si $\alpha \in]0, 1[$ et $A \neq B$.

Lemme 24. $\theta : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*, x \mapsto 1/x$ est strictement convexe.

Application 25 (Kantorovitch). Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on note $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2^4 \leq \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^2 \|x\|_2^4$.

Lemme 26. \exp est strictement convexe sur \mathbb{R} , \sin est strictement concave sur $[0, \pi/2]$.

Application 27. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ et $\forall x \in]0, \pi/2[, \frac{2}{\pi}x < \sin(x) < x$.

2.2 Inégalités dans les espaces L^p

Lemme 28. On a, $\forall p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pour tous $u, v \geq 0, uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.

Théorème 29 (Hölder). Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré. Alors si f, g mesurables positives et $p, q \geq 1$ conjugués, on a $\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu \right)^{1/q}$.

Application 30. Si X est de mesure finie, alors pour tous $1 \leq p \leq q, L^q(X) \subset L^p(X)$.

Corollaire 31 (Minkowski). Alors $(L^p(X, \mathcal{T}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

3 Optimisation

3.1 Projection dans les espaces de Hilbert

Théorème 32 (Projection). Soit H un Hilbert, soit C convexe fermé non vide de H . Alors, pour $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$. y est caractérisé par $\forall z \in C, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.

Application 33. Définition de l'espérance conditionnelle dans L^2 .

Théorème 34 (Stampacchia). Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive, soit K convexe fermé non vide. Pour tout $\ell \in H'$, il existe un unique $u \in K$ tel que pour tout $v \in K, a(u, v - u) \geq \langle \ell, v - u \rangle$. De plus, si a est symétrique, u est caractérisé par $u = \operatorname{argmin}_{v \in K} \left(\frac{1}{2} a(v, v) - \langle \ell, v \rangle \right)$.

Corollaire 35 (Lax-Milgram). Soit a forme bilinéaire continue coercive, soit $\ell \in H'$. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H, a(u, v) = \langle \ell, v \rangle$. De plus, si a est symétrique, u est caractérisé par $u = \operatorname{argmin}_{v \in H} \left(\frac{1}{2} a(v, v) - \langle \ell, v \rangle \right)$.

Application 36. Existence et unicité de solutions faibles de problèmes elliptiques.

3.2 Optimisation continue

Soit C partie convexe de \mathbb{R}^n , soit $f \in \mathcal{C}(C, \mathbb{R})$ convexe.

Proposition 37. Soit $\bar{x} \in \overset{\circ}{C}$ tel que f différentiable en \bar{x} . \bar{x} est un minimum local de f , si et seulement si, $df(\bar{x}) = 0$, et ce minimum est alors global.

Proposition 38. Si de plus f strictement convexe, f possède au plus un minimum global.

Application 39 (Systèmes linéaires). Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, soit $b \in \mathbb{R}^n$. La fonction $f : x \mapsto \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ est strictement convexe. Elle possède un unique minimum \bar{x} qui vérifie $A\bar{x} = b$.

Application 40 (John-Loewner). Soit K compact de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 contenant K de volume minimal.

3.3 Optimisation polyédrale

Soient $k \leq n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ de rang $k, b \in \mathbb{R}^k, c \in \mathbb{R}^n$.

On note $X_{ad} = \{x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0, Ax - b \leq 0\}$. On cherche à déterminer $\bar{x} = \operatorname{argmin}_{x \in X_{ad}} \langle c, x \rangle$.

Proposition 41. X_{ad} est un polyèdre, dont les sommets (et donc points extrémaux) vérifient $Ax = b$. De plus, si le minimum est atteint, alors il l'est au moins sur un sommet de X_{ad} .

On détermine alors une solution exacte grâce à l'algorithme du simplexe : partant d'un sommet, on se déplace selon l'arête de plus forte décroissance jusqu'à ce que ce ne soit plus possible.

Développements

- Processus de Galton-Watson.
- Ellipsoïde de John-Loewner.
- Inégalité de Kantorovitch + gradient à pas optimal.

Références

- [1] M. Alessandri, GROUPES EN SITUATION GÉOMÉTRIQUE, Dunod.
- [2] G. Allaire, ANALYSE NUMÉRIQUE ET OPTIMISATION, École Polytechnique.

- [3] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
 - [4] H. Brezis, ANALYSE FONCTIONNELLE, Dunod.
 - [5] J.-E. Rombaldi, ÉLÉMENTS D'ANALYSE RÉELLE, EDP Sciences.
-