

247. Exemples de problèmes d'interversion de limites.

Introduction : De nombreux opérateurs (dérivation, intégration...) sont définis comme des limites. Le problème de leurs interversions se ramène à des questions de permutation de limites.

1 Limites, suites et séries

Soient X espace métrique, F un \mathbb{R} -espace vectoriel normé. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions de X dans F , soit $f : X \rightarrow F$.

Théorème 1. Si F espace de Banach, $a \in \overline{X}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n ait une limite b_n en a . Alors $(b_n)_n$ converge vers une limite b et f admet pour limite b en a .

Contre-exemple 2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in]0, 1[$, $f_n(t) = t^n$.
On a $\lim_{t \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow 1} f_n(t) = 1$.

Théorème 3 (Cauchy). Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ deux séries absolument convergentes.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Alors $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.

Contre-exemple 4.

Si, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge mais $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$ diverge.

Application 5. Pour tous $u, v \in \mathbb{C}$, $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$.

Théorème 6 (Abel).

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R \geq 1$, telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge.

On note f la somme de la série sur le disque unité. Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$, on pose $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \theta \in [-\alpha, \alpha], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$.

Alors $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_\alpha}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exemple 7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Théorème 8 (taubérien faible). Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ série entière de rayon de convergence 1, soit f sa somme. On suppose que $S := \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} f(z)$ existe, et que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S.$$

2 Limites et régularité

2.1 Limites et continuité

Proposition 9. Une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Contre-exemple 10. $f_n : x \mapsto 1 - x^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ mais sa limite n'est pas continue.

Application 11. Une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.

2.2 Limites et dérivabilité

Théorème 12. Soit F de Banach, soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1([a, b], F)^{\mathbb{N}}$. Si $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \in \mathcal{C}([a, b], F)$ et s'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}^1([a, b], F)$ et $f' = g$.

Contre-exemple 13. Si on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$, $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et la suite converge uniformément vers $|\cdot|$ qui n'est pas dérivable en 0.

Théorème 14. Si U ouvert de \mathbb{C} , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact vers f , alors f est holomorphe, et les dérivées des $(f_n)_n$ convergent uniformément vers les dérivées de f .

Exemple 15. La fonction ζ , définie sur $\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1\}$ par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe.

Théorème 16 (Schwarz). Soient Ω ouvert de \mathbb{R}^n , $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Pour tous $a \in \Omega$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Contre-exemple 17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$. On a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

3 Limites et intégration

3.1 Théorèmes d'interversion

Contre-exemple 18. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \mathbb{1}_{[0,n]}/n$, on a $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 mais $\int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt = 1 \not\rightarrow 0$.

Proposition 19. Si pour tout n , $f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , alors $\int_a^b f_n(t)dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)dt$.

Exemple 20. $\int_0^1 \frac{\sin(nt)}{n+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Théorème 21 (Beppo-Levi). Soit $(f_n)_n$ suite croissante de fonctions mesurables positives sur un espace mesuré (X, \mathcal{T}, μ) .

On note, pour $x \in X$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Alors $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Application 22.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

Théorème 23 (Lebesgue). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$, $(p \in [1, \infty[)$ qui converge vers f μ -p.p. S'il existe $g \in L^p(\mu)$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$, alors $\int_X |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Exemple 24. $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^n dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

3.2 Intégrales à paramètre

Soient (X, \mathcal{T}, μ) espace mesuré, I intervalle de \mathbb{R} , $f : I \times X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot)$ intégrable.

Théorème 25 (Continuité). Si pour presque tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est continue sur I , et s'il existe g intégrable positive sur X telle que pour tout $(t, x) \in I \times X$, $|f(t, x)| \leq g(x)$, alors $F : t \mapsto \int_X f(t, x)dx$ est continue sur I .

Théorème 26 (Dérivabilité). Si pour presque tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est dérivable sur I , et s'il existe g intégrable positive sur X telle que pour tout $(t, x) \in I \times X$, $|\partial_t f(t, x)| \leq g(x)$, alors $F : t \mapsto \int_X f(t, x)dx$ est dérivable sur I et $F'(t) = \int_X \partial_t f(t, x)dx$.

Théorème 27 (Holomorphie). Si U ouvert de \mathbb{C} , soit $f : U \times X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$, $f(z, \cdot)$ intégrable. Si, pour presque tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ holomorphe sur U , et s'il existe $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $(z, x) \in U \times X$, $|f(z, x)| \leq g(x)$, alors $F : z \mapsto \int_X f(z, x)dx$ est holomorphe sur U et on peut dériver sous le signe intégrale.

Exemple 28. La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $\{\Re(z) > 0\}$.

3.3 Intégrales multiples

Soient $(X, \mathcal{T}, \mu), (Y, \mathcal{U}, \nu)$ deux espaces mesurés.

Théorème 29 (Tonelli). Soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives. Alors $F : x \mapsto \int_Y f(x, y)d\nu(y)$ est mesurable, et $\int_X F(x)d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y)\mu(dx)\nu(dy)$.

Théorème 30 (Fubini). On suppose maintenant f à valeurs complexes. Si $\int_X \left(\int_Y f(x, y)d\nu(y) \right) d\mu(x) < +\infty$, alors pour presque tout $x \in X$, $f(x, \cdot)$ intégrable sur Y , et $F : x \mapsto \int_Y \left(\int_X f(x, y)d\nu(y) \right) d\mu(x)$ est intégrable sur X , et vérifie $\int_X F(x)dx = \int_{X \times Y} f(x, y)d\mu(x)d\nu(y)$.

Application 31. Si X variable aléatoire d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ayant un moment d'ordre 1, on a $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt$.

4 Applications

4.1 Formule sommatoire de Poisson

Théorème 32 (Poisson). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on note $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f_n : x \mapsto f(x+n)$.

Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ converge normalement sur tout compact et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$.

Application 33. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit la fonction θ de Jacobi :

$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\theta(t)$.

4.2 Prolongement méromorphe de ζ

Lemme 34. La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} avec des pôles simples aux entiers négatifs.

Théorème 35. La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} avec un pôle simple en 1.

Développements

- Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible.
- Formule sommatoire de Poisson + fonction θ de Jacobi.
- Prolongement méromorphe de ζ .

Références

- [1] J. Faraut, CALCUL INTÉGRAL, EDP Sciences.
- [2] B. Hauchecorne, LES CONTRE-EXEMPLES EN MATHÉMATIQUES, Ellipses.
- [3] I. Nourdin, AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES - ÉPREUVE ORALE, Dunod.
- [4] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.
- [5] P. Tauvel, ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3, Dunod.