

246. Séries de Fourier. Exemples et applications.

Introduction : Les séries de Fourier ont été introduites historiquement pour l'étude de l'équation de la chaleur. Elles ont ensuite donné lieu à une généralisation et à de nombreuses applications.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Espaces fonctionnels et premiers outils

Définition 1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^{inx}$. L'espace $\mathcal{P} = \text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{Z})$ est appelé espace des polynômes trigonométriques.

Définition 2. On appelle tore l'ensemble $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi les fonctions sur \mathbb{T} s'identifient aux fonctions 2π -périodiques. On s'intéressera aux espaces de fonctions à valeurs complexes :

- $L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p < \infty$, muni de la norme $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$.
- $L^\infty(\mathbb{T})$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0, |f| \leq M \text{ p.p.}\}$.
- $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$.

Proposition 3. On a $\mathcal{C}(\mathbb{T}) \subset L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^q(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ pour $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Théorème 4. $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire étant donné par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$.

Définition 5. Pour $f, g \in L^1(\mathbb{T}), x \in \mathbb{T}$, on pose $f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)dy$.

Proposition 6. $f * g$ est bien définie presque partout, est dans $L^1(\mathbb{T})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Définition 7. On appelle approximation de l'unité une suite de fonctions $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{T})^{\mathbb{N}}$ positives d'intégrale 1 telles que $\forall \delta > 0, \int_{\delta < |x| < \pi} \alpha_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Théorème 8. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $(\alpha_n)_n$ approximation de l'unité, alors $\alpha_n * f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $(\alpha_n * f)_n$ converge uniformément vers f . Si $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p < \infty$, alors $(\alpha_n * f)_n$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{T})$.

1.2 Coefficients et série de Fourier

Définition 9. Pour $f \in L^1(\mathbb{T}), n \in \mathbb{Z}$, on définit le n -ème coefficient de Fourier de f par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt$. On notera, pour $N \in \mathbb{N}, S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f)e_n$, on l'appelle série de Fourier de f . On introduit aussi $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$.

Proposition 10. Pour $f \in L^1(\mathbb{T}), a, x \in \mathbb{T}$, on définit $\check{f}(x) = f(-x)$ et $\tau_a f(x) = f(x-a)$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}, c_n(\check{f}) = c_{-n}(f), c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$. De plus :

- Si $g \in L^1(\mathbb{T}), c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.
- Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et \mathcal{C}^1 par morceaux, $c_n(f') = -inc_n(f)$.

Proposition 11. Si f est à valeurs réelles, on a $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \in \mathbb{R} \text{ et } S_N(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

De plus, si f paire (resp. impaire), les b_n (resp. a_n) sont nuls.

Exemple 12. Si $f(x) = \mathbb{1}_{[-a, a]}(x)$ où $0 < a < \pi$, on a $a_0(f) = \frac{2a}{\pi}$ et pour $n \geq 1, a_n(f) = \frac{2a}{\pi} \text{sinc}(na), b_n(f) = 0$.

Exemple 13. Si $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ pour $x \in [-\pi, \pi]$, ses coefficients de Fourier réels sont $a_0 = \frac{4}{3}$ et pour $n \geq 1, a_n(f) = \frac{4(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}, b_n(f) = 0$.

Proposition 14 (Riemann-Lebesgue). On a, si $f \in L^1(\mathbb{T}), c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0$.

Proposition 15. On note $c_0(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, a_n \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0\}$. Alors

$$\gamma \begin{cases} L^1(\mathbb{T}) & \rightarrow c_0(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{cases} . \gamma \text{ est une application linéaire continue de norme 1.}$$

Proposition 16. Si $\sum p_n e_n$ est une série trigonométrique convergeant uniformément vers f , alors pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n = c_n(f)$.

1.3 Noyaux de Dirichlet et de Féjer

Proposition 17. On a, pour tout $f \in L^1(\mathbb{T}), f * e_n = c_n(f)e_n$. Autrement dit, les e_n sont vecteurs propres de l'opérateur de convolution $u \mapsto f * u$.

Définition 18. Pour $N \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{T}$, on définit :

- Le noyau de Dirichlet $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e_n(x) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$.
- Le noyau de Féjer $K_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2$.

Proposition 19. $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité sur \mathbb{T} .

Proposition 20. On a, pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$, $S_N(f) = D_N * f$, $\sigma_N(f) = K_N * f$.

2 Résultats de convergence

2.1 Convergence ponctuelle

Contre-exemple 21. Soit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ paire telle que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sin\left(\left(2^{k^3} + 1\right) \frac{x}{2}\right). \text{ } f \text{ est continue mais } (S_N(f))_N \text{ diverge en } 0.$$

Théorème 22 (Dirichlet). Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$, $x_0 \in \mathbb{T}$, on suppose que $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} f(x_0 + t) = f(x_0^-)$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(x_0 + t) = f(x_0^+)$ existent, et qu'il existe $\delta > 0$ tq

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0^+)| + |f(x_0 - t) - f(x_0^-)|}{t} dt < \infty. \text{ Alors } S_N(f)(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Remarque 23. Si f continue en x_0 , on a alors convergence ponctuelle. De plus, ce théorème s'applique en particulier lorsque f dérivable à droite et à gauche en x_0 .

Proposition 24. Si f est continue et de classe C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement vers f .

Application 25. En prenant respectivement $x = 0, x = \pi$ dans l'exemple 13, on

$$\text{trouve } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.2 Convergence au sens de Cesàro

Théorème 26 (Féjer). Si f continue, alors $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f . Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, alors $\sigma_N(f)$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{T})$.

Théorème 27. L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et dans $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$.

Application 28. $\gamma : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est injective.

2.3 Théorie L^2 des séries de Fourier

Remarque 29. Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$.

Proposition 30. $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Corollaire 31. On a, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|S_N(f) - f\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$. En particulier, il existe une sous-suite telle que $(S_{\varphi(N)})_N$ converge vers f presque partout.

Théorème 32 (Parseval). $\gamma : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie bijective. En particulier, $\|f\|_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

Application 33. Parseval dans l'exemple 13 donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

3 Applications

3.1 Lien avec la transformée de Fourier

Théorème 34 (Poisson). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on note $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f_n : x \mapsto f(x + n)$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ CVN sur tout compact et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n x}$.

Application 35. La fonction $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$ vérifie $\forall t > 0$, $\theta(1/t) = \sqrt{t} \theta(t)$.

Application 36. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi$.

3.2 Résolution de l'équation de la chaleur

On pose $Q =]0, 2\pi[\times]0, +\infty[$. On considère le problème $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0$ pour $(t, x) \in Q$, $u(0, x) = u_0(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$.

Proposition 37 (Conditions de Dirichlet). On suppose $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])$, dont la série de Fourier $\sum b_n e_n$ est normalement convergente, vérifiant $u_0(0) = u_0(2\pi) = 0$.

Alors la fonction $u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n}{2}\right) x e^{-n^2 t/4}$ est solution du problème avec les conditions aux limites $u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Proposition 38 (Conditions limites périodiques). On suppose $u_0 \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R}), \mathcal{C}^1$ par morceaux avec $u(0) = u(2\pi)$. On note $\sum d_n e_n$ la série de Fourier de u_0 . Il y a une unique solution au problème précédent avec conditions aux limites $u(t, 0) = u(t, 2\pi)$

pour $t \in \mathbb{R}_+$. Celle-ci est donnée par $u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}$.

Développements

- Formule sommatoire de Poisson + application.
- Équation de la chaleur avec conditions limites périodiques.

Références

- [1] J.-M. Arnaudiès, H. Fraysse, TOME 3 COMPLÉMENTS D'ANALYSE, Dunod.
- [2] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [3] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [4] C. Zuily, H. Queffélec, ANALYSE POUR L'AGRÉGATION, Dunod.