

245. Fonctions holomorphes sur un ouvert de \mathbb{C} . Exemples et applications.

Introduction : L'analyse complexe est une branche centrale des mathématiques. Elle possède en effet de nombreuses applications en analyse réelle, algèbre et même théorie des nombres.

1 Fonctions holomorphes

Soient U un ouvert de \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

1.1 Conditions de Cauchy-Riemann

Définition 1. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. f est dite différentiable en z_0 s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{f(z) - f(z_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{|z - z_0|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$, où $z = x + iy$.

On note alors $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$, et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$.

Cela revient à dire que f , vue comme fonction de \mathbb{R}^2 , est différentiable.

Définition 2. On dit que f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 si $f'(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

existe. f est dite holomorphe si elle est \mathbb{C} -dérivable en tout point de U . On note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U .

Proposition 3. On a équivalence entre :

- (i). f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 , de dérivée $f'(z_0) = \ell$.
- (ii). f est différentiable en z_0 et $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \ell$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.
- (iii). f est différentiable en z_0 et $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \ell$, $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\ell$.

En particulier, si $f = P + iQ$, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$.

- (iv.) f différentiable en z_0 et $df(z_0)$ est une similitude directe.

Exemple 4. Les polynômes sont holomorphes sur \mathbb{C} . La fonction $z \mapsto \bar{z}$ est différentiable mais non holomorphe.

Proposition 5. La dérivation complexe se comporte de la même manière vis-à-vis des opérations que la dérivation réelle.

Proposition 6. On suppose U connexe et f holomorphe. Alors f est constante ssi $f' = 0$ sur U .

1.2 Séries entières et analyticité

Proposition 7. La somme d'une série entière est holomorphe sur le disque ouvert de convergence. De plus, la dérivée est égale à la somme de la série dérivée.

Exemple 8. $z \mapsto \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est holomorphe sur $D(0, 1)$, et sa dérivée est la somme de $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)z^n$.

Définition 9. $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique si elle est développable en série entière en tout point de \mathbb{C} .

Proposition 10. La somme d'une série entière est analytique sur le disque ouvert de convergence.

Proposition 11. Toute fonction analytique sur U est holomorphe sur U .

Théorème 12 (Prolongement analytique). Soit $z_0 \in U$, supposons f analytique sur U . On a équivalence entre :

- (i). f est nulle sur U .
- (ii). f est nulle sur un voisinage de z_0 .
- (iii). $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)}(z_0) = 0$.

Corollaire 13 (Zéros isolés). Si f analytique et z_0 est un zéro de f , alors il existe $r > 0$ tel que z_0 soit le seul zéro de f dans $D(z_0, r)$.

1.3 Exponentielle et logarithme

Définition 14. L'exponentielle est définie sur \mathbb{C} par $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Proposition 15. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective.

Définition 16. Supposons U ouvert de \mathbb{C}^* . On appelle détermination continue du logarithme une application $L : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in U, \exp(L(z)) = z$.

Définition 17. On appelle primitive de f sur U toute fonction F holomorphe telle que $F' = f$.

Proposition 18. Si U ouvert connexe de \mathbb{C}^* , alors toute détermination continue du logarithme est une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$. Inversement, si $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive, il existe une détermination continue du logarithme sur U .

2 Primitives et intégrales

2.1 Intégration complexe et existence de primitives

Définition 19. On appelle chemin une application $\gamma \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Il est dit fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 20. Si $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{C})$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ chemin, on définit

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Proposition 21. Si f admet une primitive F , alors $\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Proposition 22. Soit f continue sur U . Alors f admet une primitive ssi pour tout chemin fermé γ , $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Théorème 23. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$ possédant une primitive. Alors f est holomorphe.

Théorème 24. Si U étoilé, toute fonction holomorphe possède une primitive.

2.2 Formule de Cauchy

Définition 25. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin, soit $U = \mathbb{C} \setminus \langle \gamma \rangle$. Pour $z \in U$, on définit son indice par rapport à γ , $\text{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$.

Proposition 26. $z \mapsto \text{Ind}(\gamma, z)$ est à valeurs dans \mathbb{Z} , constante sur chaque composante connexe de U et nulle sur la composante connexe non bornée.

Exemple 27. Si $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$, on a $\text{Ind}(\gamma, z) = 1$ si $|z| < 1$ et 0 sinon.

Théorème 28 (Cauchy). Soient U ouvert convexe, γ chemin fermé dans U , $z \in U \setminus \langle \gamma \rangle$, $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \text{Ind}(\gamma, z)f(z)$.

Application 29. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$.

Théorème 30. Si U ouvert de \mathbb{C} , $f \in \mathcal{H}(U)$, $z_0 \in U$, alors f est analytique sur U et le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0 est au moins $d(z_0, \mathbb{C} \setminus U)$.

3 Propriétés des fonctions holomorphes

3.1 Premières propriétés

Théorème 31. On a, si $f \in \mathcal{H}(D(0, R))$, pour tous $r \in]0, R[, n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\partial D(0, r)}$.

Corollaire 32 (Liouville). Toute fonction holomorphe sur \mathbb{C} et bornée est constante.

Application 33 (D'Alembert-Gauss). \mathbb{C} est algébriquement clos.

Théorème 34 (Propriété de la moyenne). Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors, pour tout $D(z_0, r) \subset U$, on a $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(a, r)} f(x + iy)dx dy$.

Théorème 35 (Principe du maximum). Soit U ouvert connexe borné, soit $f \in \mathcal{H}(U)$ continue sur \bar{U} . Alors si $|f|$ a un maximum local sur U , elle est constante. En particulier, pour tout $z \in U$, $|f(z)| \leq \|f\|_{\partial U}$.

3.2 Limites et holomorphie

Théorème 36. Soit U ouvert de \mathbb{C} , soit $(f_n)_n \in \mathcal{H}(U)^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur tout compact vers f . Alors $f \in \mathcal{H}(U)$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(j)})_n$ converge uniformément vers $f^{(j)}$.

Exemple 37. La fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe sur $\{\Re(s) > 1\}$.

Théorème 38. Soient (X, \mathcal{T}, μ) espace mesuré, U ouvert de \mathbb{C} , $f : U \times X \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :

- Pour tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est holomorphe.
- Pour tout $z \in U$, $f(z, \cdot)$ est mesurable.
- Il existe $g \in L^1(\mu)$ tq pour tous $(z, x) \in U \times X$, $|f(z, x)| \leq g(x)$.

Alors $F : z \mapsto \int_X f(z, x)d\mu(x)$ est holomorphe, et pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$F^{(j)} = \int_X \frac{\partial^j f}{\partial z^j}(\cdot, x)d\mu(x).$$

Exemple 39. La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $\{\Re(z) > 0\}$.

4 Fonctions méromorphes

4.1 Singularités isolées

Définition 40. Soient U ouvert de \mathbb{C} , $a \in U$, $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$. a est dite singularité isolée de f . Elle est dite apparente si f se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de a .

Proposition 41. a est une singularité apparente ssi f est bornée au voisinage de a .

Théorème 42. Si a singularité isolée de f , alors on est dans un des cas suivants :

1. a est une singularité apparente de f .
2. Il existe une unique suite finie $a_{-1}, \dots, a_{-m} \in \mathbb{C}, a_{-m} \neq 0$ telle que

$$z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} \text{ ait une singularité apparente en } a.$$

3. Pour tout $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset U$, $f(D(a, r) \setminus \{a\})$ dense dans \mathbb{C} .

Définition 43. Dans le cas 2, a est dit pôle de f d'ordre m . Dans le cas 3, a est dite singularité essentielle de f .

Exemple 44. 0 est singularité apparente de $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$, pôle d'ordre 1 de $z \mapsto \frac{1}{z}$ et singularité essentielle de $z \mapsto e^{1/z}$.

Définition 45. f est dite méromorphe sur U s'il existe A fermée discrète telle que $f \in \mathcal{H}(U \setminus A)$ et tq tous les éléments de A sont des pôles de f .

Exemple 46. Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , admettant les $-n, n \in \mathbb{N}$ pour pôles simples.

Application 47. ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , admettant 1 pour pôle simple.

4.2 Formule des résidus

Définition 48. Soient $f \in \mathcal{M}(U)$, a pôle d'ordre m de f . α_{-1} est appelé résidu de f en a et noté $\text{Res}(f, a)$.

Théorème 49. Soient a_1, \dots, a_n des pôles de f tels que $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$.

Alors si γ chemin fermé ne passant par des a_k , on a $\int_{\gamma} f(z) dz =$

$$\sum_{k=1}^n \text{Ind}(\gamma, a_k) \text{Res}(f, a_k).$$

Application 50. Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

Application 51. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $0 < \Re(z) < 1$, on a $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Développements

- Prolongement méromorphe de ζ .
- Formule des compléments.

Références

- [1] E. Amar, E. Matheron, ANALYSE COMPLEXE, Cassini.
- [2] P. Tauvel, ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3, Dunod.
- [3] P. Vogel, FONCTIONS ANALYTIQUES, Dunod.
- [4] C. Zuily, H. Queffélec, ANALYSE POUR L'AGRÉGATION, Dunod.