

## 244. Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

**Introduction :** Les fonctions analytiques ont des comportements différents sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ . On illustrera dans cette leçon cette différence à travers divers exemples et applications.

### 1 Préliminaires

**Définition 1.** Soient  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit qu'elle est développable en série entière (DSE) en  $z_0 \in U$  s'il existe  $r > 0$  et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  tels que  $D(z_0, r) \subset U$  et  $\forall z \in U, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ .

**Exemple 2.**  $f : z \mapsto \frac{1}{1-z}$  est DSE en 0 et pour tout  $z \in D(0, 1), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ .

**Définition 3.**  $f$  est dite analytique si elle est DSE en tout point de  $U$ .

**Proposition 4.** On peut dériver terme à terme la somme d'une série entière en tout point du disque ouvert de convergence.

**Corollaire 5.** Lorsque le développement en série entière existe, il est unique et donné par la série de Taylor.

**Proposition 6.** La somme d'une série entière est analytique sur le disque ouvert de convergence.

## 2 Fonctions analytiques réelles

### 2.1 Propriétés, exemples et contre-exemples

**Lemme 7.** Toute fonction analytique est  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Proposition 8.** Soit  $I$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant 0, soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ . Elle est DSE en 0 ssi il existe un voisinage  $] -\alpha, \alpha[$  de 0 dans  $I$  tel que pour tout  $x \in ] -\alpha, \alpha[, \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**Contre-exemple 9.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-1/x} \mathbf{1}_{x>0}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ . Ainsi  $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  a un rayon de convergence infini mais  $f$  n'est pas somme de sa série de Taylor.

**Contre-exemple 10.**  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$  est  $\mathcal{C}^\infty$  mais sa série de Taylor a un rayon de convergence nul.

**Exemple 11.** Les polynômes et les fractions rationnelles sans pôle sont analytiques.

**Exemple 12.**  $\exp, \sin, \cos$  sont analytiques sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ .

**Proposition 13.** On peut intégrer terme à terme la somme d'une série entière sur tout compact du disque ouvert de convergence.

**Exemple 14.**  $x \mapsto \ln(1-x)$  est DSE en 0 et  $\forall x \in ] -1, 1[, \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ .

**Théorème 15 (Bernstein).** Soient  $\alpha > 0, f \in \mathcal{C}^\infty(] -\alpha, \alpha[, \mathbb{R})$ . On suppose que  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in ] -\alpha, \alpha[, f^{(2k)}(x) \geq 0$ . Alors  $f$  est analytique sur  $] -\alpha, \alpha[$ .

**Exemple 16.**  $\tan$  est analytique sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

### 2.2 Applications

#### 2.2.1 En probabilités

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

**Définition 17.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On définit sa fonction génératrice  $G_X : ] -1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \mathbb{E}[s^X]$ .

**Proposition 18.**  $G_X$  est analytique sur  $] -1, 1[$ , et pour tout  $s \in ] -1, 1[$ ,

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) s^k.$$

**Application 19 (Galton-Watson).** On considère l'évolution d'une population, dont on note  $Z_n$  le nombre d'individus de la génération  $n$ . On suppose que chaque individu  $i$  de la génération  $n$  a  $Y_{n,i}$  enfants. Les  $(Y_{n,i})_{n,i}$  sont supposées iid, on note  $m = \mathbb{E}[Y]$  leur moyenne et pour tout  $k, p_k = \mathbb{P}(Y = k)$ . On suppose  $0 < p_0 < 1$ , et  $Z_0 = 1$ . Alors :

- Si  $m \leq 1$ , la population s'éteint presque sûrement.
- Si  $m > 1$ , la population s'éteint avec une probabilité non nulle.

## 2.2.2 Équations différentielles linéaires

**Remarque 20.** Chercher la solution d'une équation différentielle linéaire sous la forme d'une fonction développable en série entière revient à déterminer une relation de récurrence entre les coefficients.

**Exemple 21** (Équation de Bessel). On considère l'équation différentielle linéaire (E)  $xy'' + y' + xy = 0$ . Cette équation admet des solutions DSE, données par

$$f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}, a_0 \in \mathbb{R}.$$

**Application 22.**  $g(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$

**Application 23** (Wallis).  $\int_0^\pi \sin(\theta)^{2k} d\theta = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$

## 3 Fonctions analytiques complexes

### 3.1 Prolongement analytique

**Théorème 24** (Prolongement analytique). Soit  $z_0 \in U$ , supposons  $f$  analytique sur  $U$ . On a équivalence entre :

- (i).  $f$  est nulle sur  $U$ .
- (ii).  $f$  est nulle sur un voisinage de  $z_0$ .
- (iii).  $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)}(z_0) = 0$ .

**Corollaire 25** (Zéros isolés). Si  $f$  analytique et  $z_0$  est un zéro de  $f$ , alors il existe  $r > 0$  tel que  $z_0$  soit le seul zéro de  $f$  dans  $D(z_0, r)$ .

**Remarque 26.** Ainsi, une série entière réelle définie sur un intervalle ouvert se prolonge de façon unique en une série entière complexe de même rayon.

### 3.2 Analyticité des fonctions holomorphes

**Théorème 27** (Cauchy). Soient  $R > 0, f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  analytique : pour tout  $z \in D(0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ . Alors  $\forall r \in ]0, R[, 2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ .

**Corollaire 28.** On a alors,  $\forall r \in ]0, R[, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq r^{-n} \sup_{|z|=r} |f(z)|$ .

**Corollaire 29** (Liouville). Toute fonction analytique sur  $\mathbb{C}$  et bornée est constante.

**Application 30** (D'Alembert-Gauss).  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos.

**Théorème 31.** Si  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  holomorphe sur  $U$ , alors  $f$  est analytique sur  $U$ .

**Corollaire 32.** La composée de deux fonctions analytiques est analytique. L'inverse d'une fonction analytique de premier terme non nul est analytique. Être  $\mathbb{C}$ -dérivable implique être  $\mathbb{C} - \mathcal{C}^\infty$ .

### 3.3 Comportement au bord du disque de convergence

**Définition 33.** Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  série entière de rayon  $R > 0$ , de somme  $f$ . On note  $\Gamma = \mathcal{C}(0, R)$ . Un point  $a \in \Gamma$  est dit régulier s'il existe un disque  $D_a$  centré en  $a$  tel que  $f$  admette un prolongement analytique à  $D \cup D_a$ . Il est dit singulier sinon.

**Exemple 34.** 1 est point singulier de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ , tous les autres points du cercle sont réguliers.

**Théorème 35.**  $\Gamma$  contient toujours au moins un point singulier.

**Théorème 36** (Abel).

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  série entière de rayon de convergence  $R \geq 1$ , telle que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge.

On note  $f$  la somme de la série sur le disque unité. Soit  $\alpha \in ]0, \pi/2[$ , on pose  $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \theta \in [-\alpha, \alpha], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$ .

Alors  $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_\alpha}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

**Exemple 37.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$

**Théorème 38.** On note  $f$  la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  de rayon de convergence 1. On suppose que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \lambda \in \mathbb{C}$ , et que pour tout  $n, a_n = o(\frac{1}{n})$ . Alors

$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge et sa somme vaut  $\lambda$ .

## Développements

- Processus de Galton-Watson.
- Équation de Bessel.
- Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible.

## Références

- [1] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [2] P. Tauvel, ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3, Dunod.
- [3] C. Zuily, H. Queffélec, ANALYSE POUR L'AGRÉGATION, Dunod.