

**243. Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.**

## 1 Rayon de convergence

### 1.1 Le lemme d'Abel

**Définition 1.** On appelle série entière une série de fonctions de la forme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  où  $z$  est une variable complexe et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

**Théorème 2 (Abel).** S'il existe  $z_0 \in \mathbb{C}^*$  tel que la suite  $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée, alors pour tout  $z$  tel que  $|z| < |z_0|$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  converge absolument.

**Définition 3.** On définit alors le rayon de convergence de la série entière par  $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ .

**Proposition 4.** Ainsi, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  converge absolument pour  $|z| < R$  et diverge pour  $|z| > R$ .

**Exemple 5.** La série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$  a un rayon de convergence de 1. Son domaine de convergence est  $\overline{D}(0, 1) \setminus \{1\}$ .

**Proposition 6.** Si  $r \in ]0, R[$ , la série entière converge normalement sur  $\overline{D}(0, r)$ .

### 1.2 Calcul pratique

**Proposition 7 (Hadamard).** Le rayon de convergence vérifie  $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}$ .

**Exemple 8.** Le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n z^{2n}$  est  $1/\sqrt{2}$ .

**Proposition 9 (D'Alembert).** Si  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  existe, alors  $R = 1/\ell$ .

**Exemple 10.** Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , le rayon de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^\alpha z^n$  vaut 1.

**Proposition 11.** S'il existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z_0^n$  soit semi-convergente, alors le rayon de convergence est  $|z_0|$ .

**Exemple 12.** Le rayon de  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n} z^n$  vaut 1.

### 1.3 Opérations sur les séries entières

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n, \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  deux séries entières de rayons respectifs  $R_a, R_b$ .

**Proposition 13.** La série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$  a un rayon supérieur à  $\min(R_a, R_b)$ , avec égalité si  $R_a \neq R_b$ .

**Définition 14.** On définit le produit de Cauchy de ces deux séries comme la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$  où pour tout  $n, c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$ .

**Proposition 15.** La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$  a un rayon supérieur à  $\min(R_a, R_b)$  et pour  $|z| < \min(R_a, R_b)$  on a  $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ .

**Application 16.** Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  a pour rayon  $R > 0$  et si  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n z^n$  a pour rayon  $\min(1, R)$  et pour  $|z| < \min(1, R)$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .

**Définition 17.** On appelle série dérivée de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} z^n$ .

**Proposition 18.** Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.

## 2 Fonction somme d'une série entière

### 2.1 Régularité et intégration

**Proposition 19.** Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  série entière de rayon  $R$ . Sa somme  $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  est continue sur  $D(0, R)$ .

**Théorème 20.**  $f$  est même de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et sa dérivée est égale à la somme de sa série dérivée. En particulier, on a pour tout  $n$ ,  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .

**Application 21.** L'exponentielle définie par  $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  vérifie  $\exp' = \exp$ .

**Théorème 22.** Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  somme d'une série entière réelle de rayon  $R > 0$ . Alors, pour tout  $[\alpha, \beta] \subset ]-R, R[$ , on a  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\alpha}^{\beta} t^n dt$ .

## 2.2 Analyticité

**Définition 23.** Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$ . On dit qu'une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est analytique si pour tout  $a \in U$  s'il existe  $R > 0$  et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  tel que sur  $D(a, R)$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ .

**Proposition 24.** La somme d'une série entière est analytique sur le disque ouvert de convergence.

**Théorème 25** (Prolongement analytique). Si deux fonctions analytiques sur  $U$  coïncident sur un ouvert connexe de  $U$ , elles sont égales.

**Corollaire 26** (Zéros isolés). Si  $f$  est analytique, pour tout  $z_0 \in U$ , si  $f(z_0) = 0$  alors il existe  $r > 0$  tel que  $D(z_0, r) \subset U$  et  $z_0$  seul zéro de  $f$  sur ce disque.

## 2.3 Comportement au bord du disque de convergence

**Définition 27.** Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  série entière de rayon  $R > 0$ , de somme  $f$ . On note  $\Gamma = \mathcal{C}(0, R)$ . Un point  $a \in \Gamma$  est dit régulier s'il existe un disque  $D_a$  centré en  $a$  tel que  $f$  admette un prolongement analytique à  $D \cup D_a$ . Il est dit singulier sinon.

**Exemple 28.** 1 est point singulier de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ , tous les autres points du cercle sont réguliers.

**Théorème 29.**  $\Gamma$  contient toujours au moins un point singulier.

**Théorème 30** (Abel).

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  série entière de rayon de convergence  $R \geq 1$ , telle que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge.

On note  $f$  la somme de la série sur le disque unité. Soit  $\alpha \in ]0, \pi/2[$ , on pose  $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \theta \in [-\alpha, \alpha], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$ .

Alors  $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_\alpha}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

**Exemple 31.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$

**Théorème 32.** On note  $f$  la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  de rayon de convergence 1. On suppose que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \lambda \in \mathbb{C}$ , et que pour tout  $n$ ,  $a_n = o(\frac{1}{n})$ . Alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge et sa somme vaut  $\lambda$ .

## 3 Applications

### 3.1 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète

**Définition 33.** Soit  $X$  variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On définit sa fonction génératrice  $G_X$  comme la somme de la série entière  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k) z^k$ .

**Proposition 34.** Cette série entière a un rayon de convergence supérieur à 1.

**Proposition 35.** La fonction génératrice caractérise la loi de  $X$ .

**Exemple 36.** Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $G_X(z) = (1 - p + pz)^n$ . Si  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ , alors  $G_X(z) = \exp(\lambda(z - 1))$ .

**Application 37** (Galton-Watson). On considère l'évolution d'une population, dont on note  $Z_n$  le nombre d'individus de la génération  $n$ . On suppose que chaque individu  $i$  de la génération  $n$  a  $Y_{n,i}$  enfants. Les  $(Y_{n,i})_{n,i}$  sont supposées iid, on note  $m = \mathbb{E}[Y]$  leur moyenne et pour tout  $k$ ,  $p_k = \mathbb{P}(Y = k)$ . On suppose  $0 < p_0 < 1$ , et  $Z_0 = 1$ . Alors :

- Si  $m \leq 1$ , la population s'éteint presque sûrement.
- Si  $m > 1$ , la population s'éteint avec une probabilité non nulle.

### 3.2 Séries entières dans une algèbre de Banach

**Proposition 38.** Soit  $E$  un espace de Banach, soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \|u\|^n$

converge, alors l'opérateur  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$  est bien défini.

**Application 39.** Si  $\|u\| < 1$ , alors  $\text{id}_E - u$  est inversible, d'inverse  $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ .

**Application 40.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on définit  $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ . Les solutions du système différentiel  $y' = Ay, y \in \mathbb{R}^n$  sont alors données par  $y(t) = \exp(At)y_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ .

### 3.3 Dénombrement

De nombreuses propriétés d'une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'obtiennent par l'étude de la série génératrice  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n z^n$  ou de la série génératrice exponentielle  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{n!} z^n$ .

**Exemple 41** (Nombres de Catalan). Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $c_n$  le nombre de parenthésages possibles d'un mot de  $n$  lettres. Alors la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$  a pour

rayon de convergence  $\frac{1}{4}$  et sa somme vaut sur  $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$  sur  $]0, \frac{1}{4}[$ . On en déduit que pour  $n \geq 2, c_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ .

**Exemple 42** (Rendu de monnaie). Soient  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$  premiers entre eux dans leur ensemble.

Pour  $n \geq 1$ , on note  $u_n = \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k, a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n\}$ . Alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k (k-1)!} n^{k-1}$ .

### Développements

- Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible.
- Théorème de Galton-Watson.
- Problème du rendu de monnaie.

### Références

- [1] S. Méléard, ALÉATOIRE, École Polytechnique.
- [2] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.
- [3] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES - TOME 4, Masson.
- [4] C. Zuily, H. Queffélec, ANALYSE POUR L'AGRÉGATION, Dunod.