

241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Soient E, F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels normés. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions de E dans F , soit $f : E \rightarrow F$.

1 Différents modes de convergence

1.1 Convergence simple, uniforme, normale

Définition 1. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$) converge simplement vers f si,

pour tout $x \in E$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$) converge vers $f(x)$.

Exemple 2. $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers \exp .

$x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

Proposition 3. La convergence simple la croissance, la convexité (pour des fonctions réelles) et la mesurabilité.

Définition 4. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$) converge uniformément vers f si

$$\sup_{x \in E} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ (resp. si } \sup_{x \in E} \left\| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0).$$

Exemple 5. $f_n : x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$ converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R}_+ pour $\alpha > 1$.

$x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

Proposition 6. La convergence uniforme implique la convergence simple.

Contre-exemple 7. Sur $\mathbb{R}_+, x \mapsto \frac{x}{x+n}$ converge simplement mais pas uniformément vers 0.

Proposition 8. Une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Contre-exemple 9. $f_n : x \mapsto 1 - x^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ mais sa limite n'est pas continue.

Théorème 10 (Dini).

1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ suite croissante. Alors, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement, la convergence est uniforme.
2. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ suite de fonctions croissantes qui converge simplement, alors la convergence est uniforme.

Exemple 11. Si on pose, pour $x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \mathbb{1}_{[0, n]}(x)$, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : x \mapsto \exp(-x)$ sur \mathbb{R}_+ .

Application 12 (Glivenko-Cantelli). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid, on note F leur fonction de répartition commune. Pour $n \in \mathbb{N}^*, t \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k \leq t}. \text{ Alors } \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ presque sûrement.}$$

Définition 13. On dit que $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement si les $(f_n)_n$ sont bornées à partir d'un certain rang et si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge.

Proposition 14. Si F est complet, la convergence normale implique la convergence uniforme.

Contre-exemple 15. Si on pose, pour $x \in [0, 1], f_n(x) = x |\sin(\pi/x)| \mathbb{1}_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(x)$, la série $\sum f_n$ converge uniformément mais pas normalement.

1.2 Convergence presque partout, dans L^p

On suppose ici que (E, \mathcal{T}, μ) est un espace mesuré, et que $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ où \mathbb{R} muni de la tribu borélienne. On note λ la mesure de Lebesgue.

Définition 16. On dit que $(f_n)_n$ converge μ -presque partout (μ -p.p.) vers f si $\mu(\{f_n \not\rightarrow f\}) = 0$.

Exemple 17. $x \mapsto x^n$ converge λ -p.p. vers 0 sur $[0, 1]$.

Définition 18. Soit $p \in [1, +\infty]$. Si $\forall n, f_n \in L^p(\mu)$ et $f \in L^p(\mu)$, on dit que $(f_n)_n$ converge vers f dans L^p si $\|f - f_n\|_{L^p} \rightarrow 0$.

Exemple 19. $x \mapsto e^{-nx}$ converge λ -pp et dans L^p vers 0 pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Contre-exemple 20. $(\mathbb{1}_{[n, n+1]})_n$ converge λ -presque partout (et même simplement) vers 0 mais pas dans L^p pour $p \in [1, +\infty]$. La suite de fonctions "stroboscope" converge dans L^p vers 0 mais pas λ -presque partout.

Théorème 21. Si $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^p(\mu)$, elle possède une sous-suite qui converge μ -p.p.

2 Intersion de limites

2.1 Un premier résultat

Contre-exemple 22. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t > 0$, $f_n(t) = nt$.
On a $\lim_{t \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow 0} f_n(t) = 0$.

Théorème 23. Soient X espace métrique, F espace de Banach, $a \in \overline{X}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X, F)^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n ait une limite b_n en a . Alors $(b_n)_n$ converge vers une limite b et f admet pour limite b en a .

2.2 Intégration

Contre-exemple 24. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \mathbf{1}_{[0,n]}/n$, on a $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 mais $\int_{\mathbb{R}_+} f_n(t) dt = 1 \not\rightarrow 0$.

Proposition 25. Si pour tout n , $f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , alors $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt$.

Exemple 26. $\int_0^1 \frac{\sin(nt)}{n+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Théorème 27 (Beppo-Levi). Soit $(f_n)_n$ suite croissante de fonctions mesurables positives sur un espace mesuré (X, \mathcal{T}, μ) .

On note, pour $x \in X$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Alors $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Théorème 28 (Lebesgue). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$, $(p \in [1, \infty])$ qui converge vers f μ -p.p. S'il existe $g \in L^p(\mu)$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$, alors $\int_X |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2.3 Dérivation

Théorème 29. Soit F de Banach, soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1([a, b], F)^{\mathbb{N}}$. Si $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \in \mathcal{C}([a, b], F)$ et s'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}^1([a, b], F)$ et $f' = g$.

Contre-exemple 30. Si on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$, $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et la suite converge uniformément vers $|\cdot|$ qui n'est pas dérivable en 0.

3 Séries de Fourier

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on identifie les fonctions $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ aux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodiques.

Définition 31. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit son n -ème coefficient de Fourier par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$. On appelle série de Fourier de f la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$.

Proposition 32. $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Théorème 33 (Parseval). Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a $\|f\|_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

Théorème 34 (Dirichlet). Si f est continue, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement vers f dans $(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

Application 35. Soit $u_0 \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, \mathcal{C}^1 par morceaux avec $u(0) = u(2\pi)$. On considère le problème aux limites $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0$ pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[$, $u(0, x) = u_0(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$, $u(t, 0) = u(t, 2\pi)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Il y a une unique solution continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$, \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[$.

Théorème 36 (Poisson). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on note $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f_n : x \mapsto f(x+n)$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ CVN sur tout compact et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$.

Application 37. La fonction $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$ vérifie $\forall t > 0$, $\theta(1/t) = \sqrt{t} \theta(t)$.

4 Séries entières

Définition 38. On appelle série entière une série de fonctions de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où z est une variable complexe et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Théorème 39 (Abel). S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée, alors pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument.

Définition 40. On définit alors le rayon de convergence de la série entière par $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.

Proposition 41. Si $r \in]0, R[$, la série entière converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Théorème 42 (Abel).

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R \geq 1$, telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge.

On note f la somme de la série sur le disque unité. Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$, on pose $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \theta \in [-\alpha, \alpha], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$.

Alors $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_\alpha}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Application 43. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Théorème 44 (taubérien faible). Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ série entière de rayon de convergence 1, soit f sa somme. On suppose que $S := \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} f(z)$ existe, et que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Développements

- Équation de la chaleur avec CL périodiques.
- Formule sommatoire de Poisson et application.
- Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible.

Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] J. Faraut, CALCUL INTÉGRAL, EDP Sciences.
- [3] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [4] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.