

239. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Introduction : Les intégrales à paramètre interviennent dans de nombreux domaines de l'analyse : primitives, convolution, transformées classiques...

1 Régularité des intégrales à paramètre

1.1 Cas des primitives

Théorème 1. Soient $I = [a, b]$ intervalle de \mathbb{R} , E un \mathbb{R} -espace normé de dimension finie, $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux. Alors $F : [a, b] \rightarrow E, x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est continue, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, dérivable à gauche et à droite en tout $x \in I$ avec $F'_g(x) = f(x^-), F'_d(x) = f(x^+)$. En particulier, si f est continue, F est de classe \mathcal{C}^1 et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Application 2 (Cauchy-Lipschitz). Soit I intervalle de \mathbb{R} . Soient $t_0 \in I, x \in \mathbb{R}^n$.

On considère le système différentiel $(S) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x \end{cases}$ où $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie $\forall K$ compact de $I, \exists k > 0, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \forall t \in K, \|f(t, z) - f(t, y)\| \leq k\|z - y\|$. Alors (S) possède une solution unique, qui est de plus définie sur I entier.

Exemple 3. Si $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, le problème de Cauchy $y'(t) = a(t)y(t), y(0) = y_0$ possède une unique solution définie sur \mathbb{R} donnée par $y(t) = y_0 \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)$.

1.2 Théorèmes de régularité

Soient (X, \mathcal{T}, μ) espace mesuré, I intervalle de \mathbb{R} , $f : I \times X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $t \in I, f(t, \cdot)$ intégrable.

Théorème 4 (Continuité). Si pour presque tout $x \in X, f(\cdot, x)$ est continue sur I , et s'il existe g intégrable positive sur X telle que pour tout $(t, x) \in I \times X, |f(t, x)| \leq g(x)$, alors $F : t \mapsto \int_X f(t, x)dx$ est continue sur I .

Contre-exemple 5. Soit $f : (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto xe^{-xt}$. On a f continue, pour tout $x, f(x, \cdot)$ intégrable, et $F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, t)dt$ vérifie $F(0) = 0$ et $\forall x > 0, F(x) = -1$.

Théorème 6 (Dérivabilité). Si pour presque tout $x \in X, f(\cdot, x)$ est dérivable sur I , et s'il existe g intégrable positive sur X telle que pour tout $(t, x) \in I \times X, |\partial_t f(t, x)| \leq g(x)$, alors $F : t \mapsto \int_X f(t, x)dx$ est dérivable sur I et $F'(t) = \int_X \partial_t f(t, x)dx$.

Contre-exemple 7. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto x^2 e^{-|x|t}$. On a f de classe \mathcal{C}^1 , pour tout $x, f(x, \cdot)$ intégrable, et $F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, t)dt$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = |x|$ donc F non dérivable en 0.

Théorème 8 (Holomorphie). Si U ouvert de \mathbb{C} , soit $f : U \times X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U, f(z, \cdot)$ intégrable. Si, pour presque tout $x \in X, f(\cdot, x)$ holomorphe sur U , et s'il existe $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $(z, x) \in U \times X, |f(z, x)| \leq g(x)$, alors $F : z \mapsto \int_X f(z, x)dx$ est holomorphe sur U et on peut dériver sous le signe intégrale.

Remarque 9. On peut se contenter d'une domination sur tout compact dans les théorèmes précédents.

Exemple 10. La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $\{\Re(z) > 0\}$.

1.3 Cas particulier : régularité des séries

Théorème 11. Soit U ouvert connexe de \mathbb{R} ou \mathbb{C} , soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f : U \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions. Si chaque f_n est continue et si la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f , alors f est continue.

Théorème 12. Si $U = I$ intervalle de \mathbb{R} , si chaque f_n est dérivable, si $\sum f'_n$ converge uniformément vers $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ et s'il existe $\alpha \in I$ tel que $\sum f_n(\alpha)$ converge, alors $\sum f_n$ converge simplement vers f , et f est dérivable et vérifie $f' = g$.

Théorème 13. Supposons U ouvert connexe de \mathbb{C} . Si $\sum f_n$ converge uniformément vers f et si chaque f_n est holomorphe, alors f est holomorphe, et pour tout $k \in \mathbb{N}, \sum f_n^{(k)}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$.

Lemme 14. La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , dont les pôles sont simples et sont les $-n, n \in \mathbb{N}$.

Application 15. La fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe sur $\{\Re(s) > 1\}$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} ayant un unique pôle en 1, qui est un pôle simple.

2 Convolution

2.1 Généralités

Définition 16. Soient $p \in [1, +\infty]$, soient $f \in L^1, g \in L^p$. On définit leur produit de convolution par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$.

Proposition 17. $f * g$ est bien définie presque partout. De plus, $f * g \in L^p$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Corollaire 18. $(L^1(\mathbb{R}), +, *, \times)$ est une algèbre de Banach.

Proposition 19. Si $p, q \in [1, \infty]$ sont conjugués, alors $f * g$ est bien définie partout, uniformément continue, bornée, et $\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \|g\|_q$. De plus, si $1 < p < \infty$, $f * g$ a une limite nulle en l'infini, et c'est encore vrai si $p = 1$ et g est à support compact.

2.2 Régularisation

De façon générale, la convolution a un effet régularisant sur les fonctions.

Exemple 20. $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$ est la fonction tente sur $[0, 2]$.

Proposition 21. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in C^1(\mathbb{R})$ bornée à dérivée bornée. Alors $f * g$ est dérivable, de dérivée $(f * g)' = f * g'$.

Proposition 22. Soit $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, soit $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, de dérivée intégrable. Alors $f * g$ dérivable, de dérivée $(f * g)' = f * g'$.

Corollaire 23. Si $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $f * g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Exemple 24. On pose $\rho(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(x) = \rho(1-x^2)$. g est C^{∞} à support dans $[-1, 1]$.

Définition 25. On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si pour tout $n, \varphi_n \geq 0$ presque partout, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)dx = 1$ et $\forall \varepsilon >$

$$0, \int_{|x| > \varepsilon} \varphi_n(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exemple 26. Si φ positive d'intégrale 1, on définit une approximation de l'unité en posant $\varphi_n(t) = n\varphi(nt)$. En particulier, en prenant $\varphi = g$ on obtient des approximations de l'unité C^{∞} à support compact.

Proposition 27. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}), p < \infty$, soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. On a $f * \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

Théorème 28. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p < \infty$.

3 Transformée de Fourier

3.1 Généralités

Définition 29. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

On définit sa transformée de Fourier par $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$.

Proposition 30. $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ et $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

Exemple 31. Si $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, alors $\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{\xi} \sin(\xi)$.

Si $f(x) = e^{-x^2}$, alors $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$.

Proposition 32. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On a $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

On pose $\Phi_n(\xi) = e^{-|\xi|/n}$ et $\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \Phi_n(\xi) d\xi = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$.

Lemme 33. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\varphi_n * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \Phi_n(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi$.

Théorème 34. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi$ pour presque tout x . En particulier, la transformée de Fourier est injective.

Définition 35. Soit I intervalle de \mathbb{R} . On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable strictement positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, \int_I |x^n| \rho(x) dx < +\infty$.

Application 36. Soit ρ fonction poids telle que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$ pour un certain $\alpha > 0$. Alors la famille de polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho dx)$.

3.2 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire

Définition 37. Soit X une variable aléatoire réelle. Sa fonction caractéristique est définie par $\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Proposition 38. Si X admet une densité f , alors $\phi_X = \widehat{f}$.

Exemple 39. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\phi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$. Si $X \sim \mathcal{U}([-a, a])$, alors $\phi_X(t) = \frac{\sin(ta)}{ta}$.

Proposition 40. Si deux variables aléatoires réelles X, Y ont même fonction caractéristique, alors elles ont même loi.

Théorème 41 (Lévy). Soit $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires telle que $(\phi_{X_n})_n$ converge simplement vers φ . Alors $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire de fonction caractéristique φ .

Application 42 (Théorème central limite). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite de variables aléatoires iid dans L^2 . Alors $\sqrt{\frac{n}{\text{Var}(X_1)}} \left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1] \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

Développements

- Prolongement méromorphe de la fonction ζ .
- Les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne.
- Théorème central limite.

Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [3] B. Hauchecorne, LES CONTRE-EXEMPLES EN MATHÉMATIQUES, Ellipses.
- [4] P. Tauvel, ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3, Dunod.