

## 236. Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

**Introduction** : Le calcul d'intégrales permet de résoudre des équations différentielles, de calculer des moments de variables aléatoires, de sommer des quantités en physique...

## 1 Calcul de primitives et applications

### 1.1 Théorème fondamental de l'Analyse

**Théorème 1.** Toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possède une primitive  $F$ , et on a  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ .

**Exemple 2.**  $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1, \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$  pour  $\alpha \neq -1$ .

### 1.2 Intégration par parties

**Théorème 3.** Soient  $u, v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ .

On a  $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$ .

**Exemple 4** (Wallis). On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$ .

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$  et  $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ .

**Exemple 5.** Si on pose, pour tout  $x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ , on a

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . En particulier,  $\Gamma(n+1) = n!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Application 6** (Loi Gamma). Soient  $a, \lambda > 0$ . On pose pour  $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ .  $f$  est une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue, et si  $X$  est de densité  $f$ , on a  $\mathbb{E}[X] = \frac{a}{\lambda}, \text{Var}(X) = \frac{a(a+1)}{\lambda^2}$ .

## 1.3 Décomposition en éléments simples

**Lemme 7.** On a  $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + \lambda$  pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,

$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n(1+x^2)^n}$  pour  $n \geq 1$ .

**Exemple 8.**  $\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \lambda$ .

## 1.4 Changements de variables

**Proposition 9.** Si  $I, J$  intervalles de  $\mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C}^1(I, J), f \in L^1(J)$ , on a pour tous

$a, b \in I, \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$ .

**Corollaire 10.** Si  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  est paire, alors  $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$ , et si

elle est impaire,  $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$ . Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $T$ -périodique, alors pour tout

$a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ .

**Exemple 11.**  $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$ .

### Fractions rationnelles trigonométriques

Cas des polynômes : on veut calculer  $\int \cos(x)^n \sin(x)^p dx$ .

- Si  $n$  ou  $p$  est impair, par exemple si  $n = 2k + 1$ , on a  $\int \cos(x)^n \sin(x)^p dx = \int \sin(x)^p (1 - \sin^2(x))^k \cos(x) dx$  qui se calcule en posant  $t = \sin(x)$ .
- Si  $n, p$  sont pairs, on linéarise.

Cas des fractions : on veut calculer une primitive de  $R(\cos(x), \sin(x))$  où

$R \in \mathbb{R}(X, Y)$ . On applique les règles de Bioche :

- Si  $R(\cos(x), \sin(x))dx$  est invariant par  $x \mapsto \pi - x$ , poser  $t = \sin(x)$ .
- Si  $R(\cos(x), \sin(x))dx$  est invariant par  $x \mapsto -x$ , poser  $t = \cos(x)$ .
- Si  $R(\cos(x), \sin(x))dx$  est invariant par  $x \mapsto \pi + x$ , poser  $t = \tan(x)$ .

**Exemple 12.** On a  $\int \frac{\sin(x)^3}{1 + \cos(x)^2} dx = \cos(x) - 2 \arctan(\cos(x)) + \lambda$ .

## 2 Théorie de Lebesgue et théorèmes d'interversion

Soient  $(X, \mathcal{T}, \mu), (Y, \mathcal{T}', \nu)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis.

### 2.1 Limites et développements en série

**Théorème 13** (Beppo-Levi). Soit  $(f_n)_n$  suite croissante de fonctions mesurables positives sur  $X$ . On pose, pour tout  $x, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ . Alors  $f$  mesurable et

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

**Théorème 14** (Convergence dominée). Soit  $(f_n)_n$  suite de fonctions intégrable, qui converge simplement vers  $f$ , et telle qu'il existe  $g \in L^1(X)$  vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq |g(x)|$ . Alors  $f \in L^1(X)$  et  $\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu$ .

**Exemple 15.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = 1$ , d'où  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = -\gamma$  (où  $\gamma$  est la constante d'Euler).

**Exemple 16.**

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} e^{-x \cos(t)} \cos(x \sin(t)) dt \text{ d'où } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

### 2.2 Intégrales à paramètre

Soient  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  espace mesuré,  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \times X \rightarrow \mathbb{C}$  telle que pour tout  $t \in I, f(t, \cdot)$  intégrable.

**Théorème 17** (Continuité). Si pour presque tout  $x \in X, f(\cdot, x)$  est continue sur  $I$ , et s'il existe  $g$  intégrable positive sur  $X$  telle que pour tout  $(t, x) \in I \times X, |f(t, x)| \leq g(x)$ , alors  $F : t \mapsto \int_X f(t, x) dx$  est continue sur  $I$ .

**Théorème 18** (Dérivabilité). Si pour presque tout  $x \in X, f(\cdot, x)$  est dérivable sur  $I$ , et s'il existe  $g$  intégrable positive sur  $X$  telle que pour tout  $(t, x) \in I \times X, |\partial_t f(t, x)| \leq g(x)$ , alors  $F : t \mapsto \int_X f(t, x) dx$  est dérivable sur  $I$  et  $F'(t) = \int_X \partial_t f(t, x) dx$ .

**Exemple 19.** Pour  $x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2/4}$ .

**Théorème 20** (Holomorphie). Si  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$ , soit  $f : U \times X \rightarrow \mathbb{C}$  telle que pour tout  $z \in U, f(z, \cdot)$  intégrable. Si, pour presque tout  $x \in X, f(\cdot, x)$  holomorphe sur  $U$ , et s'il existe  $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  intégrable telle que pour tout  $(z, x) \in U \times X, |f(z, x)| \leq g(x)$ , alors  $F : z \mapsto \int_X f(z, x) dx$  est holomorphe sur  $U$  et on peut dériver sous le signe intégrale.

**Application 21.** Si  $X$  variable aléatoire de loi  $\Gamma$ , sa fonction caractéristique est donnée par  $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$ .

### 2.3 Intégrales multiples

**Théorème 22** (Tonelli). Soit  $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$  mesurable. Alors  $F : X \rightarrow [0, \infty]$  définie par  $F(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  est mesurable, et  $\int_X F(x) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu)$ .

**Théorème 23** (Fubini). Si maintenant  $f$  est à valeurs réelles, alors  $\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| d\mu(x)\right) d\nu(y)$ , et si l'un des deux est fini, alors pour presque tout  $x, f(x, \cdot)$  est intégrable sur  $Y$ , et  $F$  est intégrable. On a alors  $\int_X F d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu)$ .

**Exemple 24.** On a  $\int_{]0, +\infty[^2} \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{\pi^2}{2}$  d'où  $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{8}$ .

**Théorème 25.** Soient  $U, V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n, \varphi : U \rightarrow V$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Alors, pour toute fonction  $f$  intégrable sur  $V, (f \circ \varphi) |\det(d\varphi)|$  est intégrable sur  $U$  et  $\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |\det(d\varphi(x))| dx$ .

**Exemple 26.**  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

## 3 Utilisation de l'analyse complexe

Soit  $U$  ouvert convexe de  $\mathbb{C}$ .

**Théorème 27.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe, soit  $\gamma$  chemin fermé dans  $U$ . Alors  $\int_\gamma f(z) dz = 0$ .

**Définition 28.** Soit  $\gamma$  chemin fermé dans  $\mathbb{C}$ , soit  $V = \mathbb{C} \setminus \langle \gamma \rangle$ , soit  $z \in V$ . On définit l'indice de  $z$  par rapport à  $\gamma$  par  $\text{Ind}(\gamma, z) = \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ .

**Théorème 29.** Soient  $a_1, \dots, a_n \in U$  distincts,  $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$  telle que les  $a_k$  soient des pôles de  $f$ . Alors si  $\gamma$  chemin fermé dans  $U$  ne passant par aucun des  $a_k$ , on a  $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Ind}(\gamma, a_k) \text{Res}(f, a_k)$ , où  $\text{Res}(f, a_k)$  désigne le coefficient de degré 1 du polynôme  $P_k$  tel qu'au voisinage de  $a_k$ ,  $f(z) = g(z) + P\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$  avec  $g$  holomorphe sur  $U$ .

**Application 30** (Formule des compléments).

Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , on a  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ .

De plus, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , si  $0 < \Re(z) < 1$ , on a  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ .

## 4 Méthodes de calcul approché

### 4.1 Méthodes déterministes

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . On se donne une subdivision  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ .

**Définition 31.** On appelle méthode de quadrature élémentaire une approximation de la forme  $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx \simeq \sum_{j=0}^{k_i} \omega_{i,j} f(\xi_{i,j})$ , où  $\xi_{i,j} \in [a_i, a_{i+1}]$  et  $\sum_{j=0}^{k_i} \omega_{i,j} = 1$ .

La méthode est dite d'ordre  $N$  si on a une égalité pour toute fonction polynomiale de degré  $N$ , et au moins un polynôme de degré  $N+1$  pour laquelle on n'a pas un résultat exact.

**Exemple 32.**

— Rectangles à gauche :  $\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i)$ . Cette méthode est d'ordre 0.

— Point milieu :  $\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)$ . Cette méthode est d'ordre 1.

— Trapèzes :  $\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}$ . Cette méthode est d'ordre 1.

### 4.2 Une méthode probabiliste : Monte-Carlo

**Proposition 33** (Monte-Carlo). Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de variables aléatoires iid de loi uniforme sur  $[-1, 1]^d$ , soit  $f$  mesurable bornée sur  $[-1, 1]^d$ .

Alors  $\hat{I}_n := \frac{2^d}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} I := \int_{[-1, 1]^d} f(x) dx$  en probabilité.

**Proposition 34.** Pour  $d = 1$ , on a  $\mathbb{P}\left(I \in \left[\hat{I}_n - \sqrt{\frac{6}{n}} q_\alpha, \hat{I}_n + \sqrt{\frac{6}{n}} q_\alpha\right]\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - \alpha$  en notant  $q_\alpha$  le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exemple 35.** On peut ainsi approximer  $\pi = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx$ .

## Développements

- Étude de la loi Gamma.
- Formule des compléments.

## Références

- [C] M. Cottrell et al., EXERCICES DE PROBABILITÉS, Cassini.
- [D] J.-P. Demailly, ANALYSE NUMÉRIQUE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, EDP Sciences.
- [Fa] J. Faraut, CALCUL INTÉGRAL, EDP Sciences.
- [FR] J.-P. Ferrier, P. Raboin, CALCUL INTÉGRAL, Ellipses.
- [GAN] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [Mel] S. Méléard, ALÉATOIRE, École Polytechnique.
- [Mer] X. Merlin, MÉTHODIX ANALYSE, Ellipses.
- [T] P. Tauvel, ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3, Dunod.