

235. Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Introduction : Les intégrales de Riemann et de Lebesgue sont définies comme des limites. On s'intéresse donc à un cas particulier d'interversion de limites.

1 Limites et intégration

1.1 Théorèmes d'interversion

Contre-exemple 1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \mathbb{1}_{[0,n]}/n$, on a $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 mais $\int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt = 1 \not\rightarrow 0$.

Proposition 2. Si pour tout n , $f_n \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ et si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , alors $\int_a^b f_n(t)dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)dt$.

Exemple 3. $\int_0^1 \frac{\sin(nt)}{n+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Théorème 4 (Beppo-Levi). Soit $(f_n)_n$ suite croissante de fonctions mesurables positives sur un espace mesuré (X, \mathcal{T}, μ) .

On note, pour $x \in X$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Alors $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Application 5.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

Théorème 6 (Lebesgue). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$, $(p \in [1, \infty])$ qui converge vers f μ -p.p. S'il existe $g \in L^p(\mu)$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$, alors $\int_X |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Exemple 7. $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^n dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

1.2 Intégrales à paramètre

Soient (X, \mathcal{T}, μ) espace mesuré, I intervalle de \mathbb{R} , $f : I \times X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot)$ intégrable.

Théorème 8 (Continuité). Si pour presque tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est continue sur I , et s'il existe g intégrable positive sur X telle que pour tout $(t, x) \in I \times X$, $|f(t, x)| \leq g(x)$, alors $F : t \mapsto \int_X f(t, x)dx$ est continue sur I .

Théorème 9 (Dérivabilité). Si pour presque tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est dérivable sur I , et s'il existe g intégrable positive sur X telle que pour tout $(t, x) \in I \times X$, $|\partial_t f(t, x)| \leq g(x)$, alors $F : t \mapsto \int_X f(t, x)dx$ est dérivable sur I et $F'(t) = \int_X \partial_t f(t, x)dx$.

Théorème 10 (Holomorphie). Si U ouvert de \mathbb{C} , soit $f : U \times X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$, $f(z, \cdot)$ intégrable. Si, pour presque tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ holomorphe sur U , et s'il existe $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $(z, x) \in U \times X$, $|f(z, x)| \leq g(x)$, alors $F : z \mapsto \int_X f(z, x)dx$ est holomorphe sur U et on peut dériver sous le signe intégrale.

Exemple 11. La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $\{\Re(z) > 0\}$.

1.3 Intégrales multiples

Soient $(X, \mathcal{T}, \mu), (Y, \mathcal{U}, \nu)$ deux espaces mesurés, avec μ, ν σ -finies.

Théorème 12 (Tonelli). Soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives. Alors $F : x \mapsto \int_Y f(x, y)d\nu(y)$ est mesurable, et $\int_X F(x)d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y)\mu(dx)\nu(dy)$.

Théorème 13 (Fubini). On suppose maintenant f à valeurs complexes. Si $\int_X \left(\int_Y f(x, y)d\nu(y) \right) d\mu(x) < +\infty$, alors pour presque tout $x \in X$, $f(x, \cdot)$ intégrable sur Y , et $F : x \mapsto \int_Y \left(\int_X f(x, y)d\mu(x) \right) d\nu(y)$ est intégrable sur X , et vérifie $\int_X F(x)dx = \int_{X \times Y} f(x, y)d\mu(x)d\nu(y)$.

Application 14. Si X variable aléatoire d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ayant un moment d'ordre 1, on a $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt$.

2 Applications

2.1 Convolution et régularisation

Définition 15. Soit $p \in [1, +\infty]$, soient $f \in L^1, g \in L^p$. On définit leur produit de convolution par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$.

Proposition 16. $f * g$ est bien définie presque partout. De plus, $f * g \in L^p$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Corollaire 17. $(L^1(\mathbb{R}), +, *, \times)$ est une algèbre de Banach.

Proposition 18. Si $p, q \in [1, \infty]$ sont conjugués, alors $f * g$ est bien définie partout, uniformément continue, bornée, et $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. De plus, si $1 < p < \infty$, $f * g$ a une limite nulle en l'infini, et c'est encore vrai si $p = 1$ et g est à support compact.

De façon générale, la convolution a un effet régularisant sur les fonctions.

Exemple 19. $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$ est la fonction tente sur $[0, 2]$.

Proposition 20. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in C^1(\mathbb{R})$ bornée à dérivée bornée. Alors $f * g$ est dérivable, de dérivée $(f * g)' = f * g'$.

Proposition 21. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, soit $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, de dérivée intégrable. Alors $f * g$ dérivable, de dérivée $(f * g)' = f * g'$.

Corollaire 22. Si $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Exemple 23. On pose $\rho(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(x) = \rho(1 - x^2)$. g est C^∞ à support dans $[-1, 1]$.

Définition 24. On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si pour tout $n, \varphi_n \geq 0$ presque partout, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$ et $\forall \varepsilon > 0, \int_{|x| > \varepsilon} \varphi_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Exemple 25. Si φ positive d'intégrale 1, on définit une approximation de l'unité en posant $\varphi_n(t) = n\varphi(nt)$. En particulier, en prenant $\varphi = g$ on obtient des approximations de l'unité C^∞ à support compact.

Proposition 26. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}), p < \infty$, soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. On a $f * \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

Théorème 27. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p < \infty$.

2.2 Transformée de Fourier

Définition 28. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier

$$\widehat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Proposition 29. Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}), \widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.

Proposition 30. \widehat{f} est continue. De plus, si $x \mapsto xf(x)$ est intégrable, alors \widehat{f} est dérivable et $\widehat{f}' = -ix\widehat{f}$.

Lemme 31 (Riemann-Lebesgue). On a $\widehat{f}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} 0$.

Théorème 32 (Poisson). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on note $\forall n \in \mathbb{Z}, f_n : x \mapsto f(x + n)$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ CVN sur tout compact et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nx}$.

Application 33. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit la fonction θ de Jacobi :

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}. \text{ Alors, pour tout } t \in \mathbb{R}, \theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\theta(t).$$

Application 34. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors, $\forall t \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi$.

Définition 35. Si X variable aléatoire à valeurs réelles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on définit sa fonction caractéristique $\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Théorème 36. ϕ_X caractérise la loi de X .

Exemple 37. Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1), \phi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

Proposition 38. Si X, Y sont deux variables indépendantes, $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$.

Application 39 (Pólya). Soit $d \geq 3$.

On note $\{e_1, \dots, e_d\}$ la base canonique de \mathbb{R}^d . On considère la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d définie par $X_0 = 0, X_{n+1} = X_n + \theta_{n+1}$ où $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires iid, de loi uniforme sur $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$. On a alors $\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n\| = \infty\right) = 1$, et la marche aléatoire est transiente.

2.3 Prolongement méromorphe de ζ

Lemme 40. La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} avec des pôles simples aux entiers négatifs.

Théorème 41. La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} avec un pôle simple en 1.

Développements

- Formule sommatoire de Poisson + fonction θ de Jacobi.
- Prolongement méromorphe de ζ .

Références

- [1] J. Faraut, CALCUL INTÉGRAL, EDP Sciences.
- [2] B. Hauchecorne, LES CONTRE-EXEMPLES EN MATHÉMATIQUES, Ellipses.
- [3] I. Nourdin, AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES - ÉPREUVE ORALE, Dunod.
- [4] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.
- [5] P. Tauvel, ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3, Dunod.