

234. Espaces $L^p, 1 \leq p \leq \infty$.

Introduction : Les espaces L^p sont des espaces importants en analyse fonctionnelle, puisqu'ils présentent de bonnes propriétés vis-à-vis de la convolution et de la transformée de Fourier. De plus, leur complétude est une justification de l'introduction de l'intégrale de Lebesgue.

1 Généralités sur les espaces L^p

1.1 Construction des espaces L^p

Définition 1. Soit $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$, et $\|f\|_{\infty} = \inf\{M > 0, |f| \leq M \mu\text{-p.p.}\}$. On notera $\mathcal{L}_p(\mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}, \|f\|_p < \infty\}$.

Proposition 2 (Hölder). Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a alors, pour f, g mesurables, $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Corollaire 3 (Minkowski). Pour f, g mesurables, on a $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Proposition 4. La relation \sim définie sur $\mathcal{L}^p(\mu)$ par $f \sim g \Leftrightarrow f = g \mu\text{-p.p.}$ est une relation d'équivalence.

Définition 5. L'espace quotient est noté $L^p(\mu)$. Lorsque $\Omega = \mathbb{N}$ et μ est la mesure de comptage, on le note $\ell^p(\mathbb{N})$.

Proposition 6. $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé.

1.2 Premières propriétés

Proposition 7. Soient $p \leq q$.

- On a alors $\ell^p(\mathbb{N}) \subseteq \ell^q(\mathbb{N})$.
- Si μ est une mesure finie, on a $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

Proposition 8. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^p(\mu)$. Alors elle possède une sous-suite qui converge presque partout.

Contre-exemple 9. La convergence L^p n'implique pas la convergence $\mu\text{-p.p.}$ (Stroboscope).

Théorème 10 (Riesz-Fischer). $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.

Théorème 11 (Convergence dominée). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers f . S'il existe $g \in L^p(\mu)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g \mu\text{-p.p.}$, alors $f \in L^p(\mu)$ et $\|f - f_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Contre-exemple 12. La domination est nécessaire : $f_n = n^{1/p} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$ converge presque partout vers 0 mais pas dans $L^p(\lambda)$.

Proposition 13. Dans un espace probabilisé, la convergence L^p implique la convergence en probabilité.

2 Convolution et densité dans les espaces L^p

On se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

2.1 Parties denses dans L^p

Proposition 14. $L^1 \cap L^{\infty}$ est dense dans L^p pour $1 \leq p < \infty$.

Lemme 15. L'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans L^p .

Proposition 16. L'espace L^p est séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Proposition 17. L'espace des fonctions continues à support compact est dense dans L^p pour $1 \leq p < \infty$.

2.2 Convolution

Définition 18. Soit $p \in [1, +\infty]$, soient $f \in L^1, g \in L^p$. On définit leur produit de convolution par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$.

Proposition 19. $f * g$ est bien définie presque partout. De plus, $f * g \in L^p$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Corollaire 20. $(L^1(\mathbb{R}), +, *, \times)$ est une algèbre de Banach.

Proposition 21. Si $p, q \in [1, \infty]$ sont conjugués, alors $f * g$ est bien définie partout, uniformément continue, bornée, et $\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \|g\|_q$. De plus, si $1 < p < \infty$, $f * g$ a une limite nulle en l'infini, et c'est encore vrai si $p = 1$ et g est à support compact.

De façon générale, la convolution a un effet régularisant sur les fonctions.

Exemple 22. $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$ est la fonction tente sur $[0, 2]$.

2.3 Régularisation

Proposition 23. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in C^1(\mathbb{R})$ bornée à dérivée bornée. Alors $f * g$ est dérivable, de dérivée $(f * g)' = f * g'$.

Proposition 24. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, soit $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, de dérivée intégrable. Alors $f * g$ dérivable, de dérivée $(f * g)' = f * g'$.

Corollaire 25. Si $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Exemple 26. On pose $\rho(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(x) = \rho(1 - x^2)$. g est C^∞ à support dans $[-1, 1]$.

Définition 27. On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si pour tout $n, \varphi_n \geq 0$ presque partout, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$ et $\forall \varepsilon > 0, \int_{|x| > \varepsilon} \varphi_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Exemple 28. Si φ positive d'intégrale 1, on définit une approximation de l'unité en posant $\varphi_n(t) = n\varphi(nt)$. En particulier, en prenant $\varphi = g$ on obtient des approximations de l'unité C^∞ à support compact.

Proposition 29. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}), p < \infty$, soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. On a $f * \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

Théorème 30. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p < \infty$.

3 Analyse de Fourier

3.1 Transformation de Fourier dans L^1

Définition 31. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

On définit sa transformée de Fourier par $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx$.

Proposition 32. $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ et $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Exemple 33. Si $f(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$, alors $\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{\xi} \sin(\xi)$.
Si $f(x) = e^{-x^2}$, alors $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}$.

Proposition 34. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On a $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.

On pose $\Phi_n(\xi) = e^{-|\xi|/n}$ et $\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \Phi_n(\xi) d\xi = \frac{n}{\pi(1 + n^2 x^2)}$.

Lemme 35. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\varphi_n * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \Phi_n(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi$.

Théorème 36. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi$ pour presque tout x .

3.2 Transformation de Fourier dans L^2

Théorème 37 (Plancherel). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\widehat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$.

Définition 38. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on définit $\mathcal{P}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}$.

Théorème 39. \mathcal{P} se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

4 L'espace L^2

On se place à nouveau sur un espace mesuré quelconque (E, \mathcal{E}, μ) .

4.1 Structure hilbertienne

Proposition 40. $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit $\langle f, g \rangle = \int_E fg d\mu$.

Théorème 41 (de projection). Soit F sous-espace fermé de $L^2(\mu)$. Alors, pour tout $f \in L^2(\mu)$, il existe un unique $g \in F$ tel que $\|g - f\|_2 = \inf_{h \in F} \|h - f\|_2$.

Application 42. Définition de l'espérance conditionnelle sur L^2 .

4.2 Polynômes orthogonaux

Définition 43. Soit I intervalle de \mathbb{R} . On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable strictement positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, \int_I |x^n| \rho(x) dx < +\infty$.

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions intégrables sur I par rapport à la mesure de densité ρ par rapport à λ . C'est un espace de Hilbert.

Proposition 44. Il existe une unique famille orthogonale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$.

Exemple 45. Pour $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on obtient les polynômes de Hermite :

$P_n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$. Pour $I = [-1, 1]$ et $\rho(x) = 1$, on obtient les po-

lynômes de Legendre : $P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n]$.

Théorème 46. Soit ρ fonction poids telle que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$ pour un certain $\alpha > 0$. Alors la famille de polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Application 47 (Méthode de Gauss). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de Legendre L_n possède n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, et si on note, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\lambda_i = \int_{-1}^1 \left(\prod_{j \neq i} \frac{t - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j} \right) dt, \text{ on a } \forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_{-1}^1 Q(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q(\alpha_i).$$

4.3 Signaux à spectre borné

Définition 48. Soit $I = [-1, 1]$. On appelle ensemble des signaux à bande limitée dans I l'ensemble $BL^2(I) = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \hat{u} = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus I\}$.

Proposition 49. $BL^2(I)$ est un espace de Hilbert (muni du produit scalaire usuel) dont $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sinc}(2k\pi - x)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne.

Théorème 50 (Shannon). $\forall u \in BL^2(I), u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(2k\pi) \text{sinc}(2k\pi - x)$, la convergence ayant lieu uniformément et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Développements

- Théorème d'échantillonnage de Shannon.
- Densité des polynômes orthogonaux.

Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] M. Briane, G. Pagès, THÉORIE DE L'INTÉGRATION, Vuibert.
- [3] J. Faraut, CALCUL INTÉGRAL, EDP Sciences.
- [4] F. Hirsch, G. Lacombe, ÉLÉMENTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE, Dunod.