

233. Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Introduction : La résolution de systèmes linéaires et la recherche de valeurs propres sont des opérations difficiles et coûteuses, qui nécessitent des méthodes d'approximation efficaces.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1 Généralités

1.1 Normes matricielles

Définition 1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que c'est une norme matricielle si pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Exemple 2. La norme de Frobenius, définie par $\|M\| = \sqrt{\text{tr}(M^*M)}$, est une norme matricielle.

Contre-exemple 3. La norme définie par $\|M\| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}|$ n'est pas une norme matricielle.

Définition 4. Soit $|\cdot|$ une norme vectorielle sur \mathbb{K}^n . On lui associe une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelée norme subordonnée, par $\|M\| = \sup_{|x|=1} |Mx|$.

Proposition 5. Toute norme subordonnée est une norme matricielle.

Contre-exemple 6. La norme de Frobenius est matricielle mais pas subordonnée.

1.2 Rayon spectral

Définition 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit son rayon spectral par $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$.

Remarque 8. Le rayon spectral n'est pas une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 9. Pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$, on a pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\rho(A) \leq \|A\|$. Réciproquement, pour tous $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Application 10. La suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ssi $\rho(A) < 1$.

1.3 Conditionnement

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Remarque 11. On constate que, pour deux vecteurs $b, b' \in \mathbb{K}^n$ ("proches"), les solutions du système $Ax = b$ peuvent être très différentes.

Définition 12. Si $\|\cdot\|$ norme subordonnée, on définit le conditionnement de A relativement à cette norme par $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Proposition 13. Si on note $x, x + \delta x$ les solutions de $Ax = b, A(x + \delta x) = b + \delta b$, on a $\frac{|\delta x|}{|x|} \leq \text{cond}(A) \frac{|\delta b|}{|b|}$, et l'inégalité est optimale.

Proposition 14. Si on note $x, x + \delta x$ les solutions de $Ax = b, (A + \delta a)(x + \delta x) = b$, on a $\frac{|\delta x|}{|x + \delta x|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$, et l'inégalité est optimale.

2 Résolution de systèmes linéaires

Soient $A \in GL_n(\mathbb{C}), b \in \mathbb{C}^n$, on cherche à résoudre le système $Ax = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}^n$.

Exemple 15. L'interpolation d'un ensemble de points par splines cubiques nécessite la résolution d'un système linéaire.

2.1 Méthodes directes

Remarque 16. Si A est triangulaire, le système se résout par algorithme de descente ou de remontée en $\frac{n(n+1)}{2}$ opérations.

Théorème 17 (Décomposition LU). Supposons que toutes les sous-matrices diagonales de A sont inversibles. Alors il existe un unique couple $(L, U) \in GL_n(\mathbb{C})^2$ où U triangulaire supérieure, L triangulaire inférieure à diagonale 1, tel que $A = LU$.

Cette décomposition s'obtient de façon effective par pivot de Gauss en $\frac{n^3}{3}$ opérations.

Application 18. Calcul de $\det(A)$ en $\frac{n^3}{3}$ opérations.

Théorème 19 (Décomposition QR). Supposons $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in GL_n(\mathbb{R})^2$ où Q orthogonale, R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Cette décomposition s'obtient de façon effective par la méthode de Householder en $\frac{2n^3}{3}$ opérations.

2.2 Méthodes itératives de décomposition régulière

Définition 20. On écrit $A = M - N$ avec M inversible. On dit que la méthode itérative associée à cette décomposition est convergente si, pour tout $b \in \mathbb{C}^n$, pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$, la suite définie par $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$ converge.

Lemme 21. Si la méthode converge, alors sa limite x est l'unique solution du système linéaire $Ax = b$.

Proposition 22. La méthode converge, si et seulement si, $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Théorème 23. Si $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$, alors $M^* + N$ est hermitienne. Si elle est de plus définie positive, alors la méthode itérative converge.

Application 24. On note D la partie diagonale de A , E sa partie triangulaire inférieure, F sa partie triangulaire supérieure.

La méthode de Jacobi est associée à la décomposition $M = D, N = E + F$.

La méthode de Gauss-Seidel est associée à la décomposition $M = D - E, N = F$. Ainsi, si A est hermitienne définie positive, la méthode de Gauss-Seidel converge. Si de plus, $2D - A$ est définie positive, la méthode de Jacobi converge.

Exemple 25. La résolution de problèmes linéaires associés à la matrice du Laplacien $1D$, donnée par $A_n = n^2 \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, peuvent se faire par Jacobi et Gauss-Seidel.

2.3 Méthodes de gradient

Lemme 26. Soient $A \in S_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$. Alors :

- Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, f admet un unique minimum en x_0 qui est la solution de $Ax = b$.
- Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $b \in \text{Im}(A)$, les points où f atteint son minimum sont exactement les solutions de $Ax = b$.
- Sinon, f n'est pas minorée.

Théorème 27. On suppose $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors x_0 réalise le minimum de f ssi $\nabla f(x_0) = 0$. De plus, si $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x) \neq 0$, alors pour tout $\alpha \in]0, \frac{2}{\rho(A)}[$, $f(x - \alpha \nabla f(x)) < f(x)$.

Corollaire 28. Ainsi, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite définie par $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) = x_k + \alpha(b - Ax_k)$ converge vers la solution de $Ax = b$.

Remarque 29. Cette suite est celle de la décomposition régulière $M = \alpha^{-1}I_n$, $N = \alpha^{-1}I_n - A$.

Proposition 30 (Pas optimal). La suite définie par $x_{k+1} = x_k + \alpha_k(b - Ax_k)$, où α_k minimise la fonction $g_k(\alpha) = f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$, converge vers la solution de $Ax = b$.

3 Recherche d'éléments propres

Exemple 31. L'étude de la résistance aux vibrations d'un système mécanique, ou de la stabilité d'équilibres d'une EDO, nécessitent un calcul de valeurs propres.

3.1 Résultats théoriques

Définition 32. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit le i -ème disque de Gershgorin de A comme le disque de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

On définit le domaine de Gershgorin de A comme $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

Proposition 33. Le spectre de A est inclus dans \mathcal{G} .

Théorème 34. Soit \mathcal{E} une composante connexe de \mathcal{G} , contenant p disques de Gershgorin. Alors il y a p valeurs propres de A dans \mathcal{E} , comptées avec multiplicité.

3.2 Aspects algorithmiques

Méthode de la puissance

Théorème 35. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans \mathbb{C} , dont les valeurs propres vérifient $0 < |\lambda_1| < \dots < |\lambda_{n-1}| < \lambda_n$. Soit e_n vecteur propre associé à λ_n , soit x_0 tel que sa composante en e_n dans la base des vecteurs propres soit non nulle, et tel que $\|x_0\|_2 = 1$. On pose, pour tout $n, x_{n+1} = \frac{Ax_n}{\|Ax_n\|_2}$. Alors la suite $(\|x_n\|_2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers λ_n .

Remarque 36. On peut aussi déterminer la plus petite valeur propre en appliquant cette méthode à A^{-1} .

Méthode QR

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On considère les suites $(A_k)_k, (Q_k)_k, (R_k)_k$ définies par $A_0 = A, (Q_k, R_k)$ décomposition QR de A_k , et $A_{k+1} = R_k Q_k$.

Théorème 37. On suppose A diagonalisable : $A = PDP^{-1}$, que ses valeurs propres sont de modules différents, et que la matrice de passage admet une décomposition LU. Alors $(A_k)_k$ converge vers D .

Développements

- Méthodes itératives de décomposition régulière.
- Méthode de gradient à pas optimal.

Références

- [1] G. Allaire, S.-M. Kaber, ALGÈBRE LINÉAIRE NUMÉRIQUE, Ellipses.
- [2] P. G. Ciarlet, INTRODUCTION À L'ANALYSE MATRICIELLE ET À L'OPTIMISATION, Dunod.
- [3] D. Serre, LES MATRICES, Dunod.