

232. Méthodes d'approximation des solutions d'une équation

$F(X) = 0$. Exemples.

Introduction : La résolution de certaines équations peut être très coûteuse (grands systèmes linéaires), voire impossible à réaliser de façon exacte (équations non linéaires). D'où l'intérêt de développer des méthodes d'approximation.

1 Cas d'une inconnue scalaire

1.1 Position du problème

On considère un intervalle $I =]a, b[$ de \mathbb{R} non vide, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, on cherche à résoudre l'équation $f(\alpha) = 0$ d'inconnue $\alpha \in I$. On suppose que celle-ci possède au moins une solution. On construit pour cela une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$.

Définition 1. On dit que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers α avec l'ordre $p \geq 1$ s'il existe $C > 0, k_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall k \geq k_0, \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} \leq C$.

La suite $(x_k)_k$ est construite de façon itérative, et dépend du choix du point de départ x_0 .

Définition 2. S'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$, la suite converge vers α , on parlera de convergence locale. Si pour tout $x_0 \in I$, la suite converge vers α , on parlera de convergence globale.

De façon générale, on se fixera un critère d'arrêt $\varepsilon > 0$ et on arrêtera les itérations lorsque $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ ou lorsque $|f(x_k)| < \varepsilon$.

1.2 Méthode de dichotomie

Proposition 3 (valeurs intermédiaires). Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ vérifie $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Algorithme 4. Poser $a_0 = a, b_0 = b$. Tant que $|a_n - b_n| > \varepsilon$, poser $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

- Si $f(a_n)f(x_n) < 0$, poser $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = x_n$.
- Si $f(x_n)f(b_n) < 0$, poser $a_{n+1} = x_n, b_{n+1} = b_n$.

Proposition 5. On a pour tout $k \in \mathbb{N}, |x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^k}$.

Remarque 6.

- Cette méthode ne nécessite pas que f soit dérivable.
- En revanche, elle converge assez lentement et l'erreur ne décroît pas toujours.

1.3 Méthodes de point fixe

On pose, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\phi(x) = x + \lambda f(x)$ (ou plus généralement, $\phi(x) = x + F(f(x))$ où $F(0) = 0$). La recherche d'un zéro de f se ramène alors à la recherche d'un point fixe de ϕ .

Théorème 7 (Picard). Si $\phi([a, b]) \subseteq [a, b]$ et ϕ est ρ -lipschitzienne avec $\rho < 1$, alors ϕ admet un unique point fixe α , et pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite définie par $x_{k+1} = \phi(x_k)$ vérifie $|x_k - \alpha| \leq \frac{\rho^k}{1-\rho} |x_1 - x_0|$.

Remarque 8. Si ϕ dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $\forall x \in]a, b[, |\phi'(x)| \leq \rho < 1$, alors ϕ est ρ -lipschitzienne.

Exemple 9. Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = e^x - 4x$, alors $\phi(x) = \frac{1}{4}f(x) + x$ est contractante et vérifie $\phi([0, 1]) \subseteq [0, 1]$. La recherche d'un zéro de f se ramène à la recherche d'un point fixe de ϕ .

Proposition 10 (Classification des points fixes). Soit $I = [a, b]$, soit $\phi \in \mathcal{C}^1(I, I)$, soit $\alpha \in [a, b]$ point fixe de ϕ . Alors :

- Si $|\phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$, on a $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha$ avec un ordre 1. Le point fixe est dit attractif.
- Si $|\phi'(\alpha)| > 1$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[, |\phi(x) - \alpha| > |x - \alpha|$. Le point fixe est dit répulsif.
- Si $|\phi'(\alpha)| = 1$, le point fixe est dit douteux, on ne peut rien conclure.

Remarque 11. Si $\phi'(\alpha) = 0$, le point fixe est dit super-attractif. Si ϕ est de plus \mathcal{C}^2 , il y a convergence vers α avec un ordre 2.

Exemple 12.

- Si, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $\phi(x) = \sin(x)$, on a $|\phi'(0)| = 1$ et pour tout $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la suite des itérés $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le point fixe 0.
- Si, pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $\phi(x) = \text{sh}(x)$, on a $|\phi'(0)| = 1$ et pour tout $x_0 \in [0, +\infty[$, la suite des itérés $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ diverge.

1.4 Méthodes de la corde, de la sécante, de Newton

On construit ici $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en approximant à chaque itération f par un polynôme de degré 1 et en cherchant le zéro de ce polynôme.

Méthode de la corde

On se donne $x_0 \in I$ et on pose $x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(x_k)$. Elle consiste à approximer à chaque étape f par sa corde aux deux extrémités de I .

Proposition 13. Si f est \mathcal{C}^1 et que la pente de la corde est du même signe que $f'(\alpha)$, alors la méthode converge localement avec un ordre 1.

Méthode de la sécante

On se donne $x_0, x_1 \in I$ et on pose ici $x_{k+2} = x_{k+1} - \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_{k+1}) - f(x_k)} f(x_{k+1})$. Cela revient à approximer f par sa corde (x_k, x_{k+1}) .

Proposition 14. Si f est de classe \mathcal{C}^2 sur un voisinage de α et $f'(\alpha) \neq 0$, alors la méthode converge localement, et $|x_k - \alpha|$ est majorée par une suite qui converge à l'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Méthode de Newton

On se donne $x_0 \in I$, on suppose f de classe \mathcal{C}^1 et on pose $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Cela revient à approximer f par sa tangente en x_k .

Proposition 15. S'il existe $\delta > 0$ tel que f soit de classe \mathcal{C}^2 sur $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ et si f' ne s'annule pas sur cet intervalle, alors pour tout $x_0 \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$, la suite converge avec un ordre 2.

Contre-exemple 16. La fonction $f(x) = \arctan(x)$ montre qu'il n'y a pas convergence globale en général.

1.5 Cas particulier : racines des polynômes

Lemme 17 (Gauss-Lucas). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .

Théorème 18. Soit $P(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r}$ fonction polynomiale réelle, avec $a_1 < \cdots < a_r$ et $\forall i, m_i \geq 1$.

Pour tout $x_0 > a_r$, la suite de Newton $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers a_r , et :

- Si $m_r = 1$, alors $\forall \varepsilon > 0, |x_n - a_r| = o(\varepsilon^n)$.
- Si $m_r \geq 2$, alors $\exists c > 0, |x_n - a_r| \sim c \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$.

Remarque 19. Il existe de nombreuses autres méthodes d'approximation des racines de polynômes : disques de Gershgorin, suites de Sturm, méthodes de valeurs propres via les matrices compagnons...

2 Cas d'une inconnue vectorielle

2.1 Méthodes itératives pour les systèmes linéaires

Soient $A \in GL_n(\mathbb{C}), b \in \mathbb{C}^n$. On cherche désormais à résoudre le problème $Ax - b = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{C}^n$.

Définition 20. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ que l'on écrit $A = M - N$ avec M inversible. On dit que la méthode itérative associée à cette décomposition est convergente si, pour tout $b \in \mathbb{C}^n$, pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$, la suite définie par $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$ converge.

Lemme 21. Si la méthode converge, alors sa limite x est l'unique solution du système linéaire $Ax = b$.

Proposition 22. La méthode converge, si et seulement si, $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Théorème 23. Si $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$, alors $M^* + N$ est hermitienne. Si elle est de plus définie positive, alors la méthode itérative converge.

Application 24. On note D la partie diagonale de A , E sa partie triangulaire inférieure, F sa partie triangulaire supérieure.

La méthode de Jacobi est associée à la décomposition $M = D, N = E + F$.

La méthode de Gauss-Seidel est associée à la décomposition $M = D - E, N = F$. Ainsi, si A est hermitienne définie positive, la méthode de Gauss-Seidel converge. Si de plus, $2D - A$ est définie positive, la méthode de Jacobi converge.

Exemple 25. La résolution de problèmes linéaires associés à la matrice du Laplacien $1D$, donnée par $A_n = n^2 \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, peuvent se faire par Jacobi et Gauss-Seidel.

2.2 Méthodes pour des systèmes non linéaires dans \mathbb{R}^n

Soit Ω ouvert de \mathbb{R}^n , soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, telle qu'il existe $\alpha \in \Omega$ avec $f(\alpha) = 0$.

Proposition 26 (Newton). On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 et vérifie $Jf(\alpha) \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(\alpha, \delta)$, la suite définie par $x_{k+1} = x_k - Jf(x_k)^{-1}f(x_k)$ soit bien définie et converge vers α avec un ordre 2.

Remarque 27. La méthode de la sécante admet aussi une généralisation dans \mathbb{R}^n .

Remarque 28. Le théorème du point fixe de Picard est encore vrai dans \mathbb{R}^n .

Développements

- Méthode de Newton pour les polynômes.
- Méthodes itératives pour les systèmes linéaires.

Références

- [1] G. Allaire, S.-M. Kaber, ALGÈBRE LINÉAIRE NUMÉRIQUE, Ellipses.
- [2] J.-P. Demailly, ANALYSE NUMÉRIQUE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, EDP Sciences.
- [3] A. Quarteroni et al., MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LE CALCUL SCIENTIFIQUE, Springer.