

## 230. Séries de nombres réels ou complexes. Comportements des restes ou des sommes partielles des séries numériques.

### Exemples.

**Introduction :** Le mathématicien grec Zénon affirmait qu'une somme infinie est toujours infinie. Ce n'est cependant toujours pas le cas. Que peut-on dire de telles sommes infinies ?

## 1 Généralités

### 1.1 Définitions et premières propriétés

On notera dans ce paragraphe  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite. On appelle série de terme général  $u_n$ ,

et on note  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ , la suite de terme général  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

**Définition 2.** La série est dite convergente si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. On appelle alors reste de la série la suite  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ .

**Exemple 3.** La série arithmétique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} an$  diverge dès que  $a \neq 0$ .

**Exemple 4.** La série géométrique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$  converge si et seulement si  $|q| < 1$ .

**Proposition 5** (Critère de Cauchy). La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \left| \sum_{k=p}^q u_k \right| \leq \varepsilon.$$

**Proposition 6.** Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge, alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Contre-exemple 7.** La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1}$  diverge bien que  $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Définition 8.** On dira que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est absolument convergente si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$  converge.

**Proposition 9.** Toute série absolument convergente est convergente.

## 2 Séries à termes réels positifs

On considère ici  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite à termes positifs.

**Proposition 10.** La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge, si et seulement si elle est majorée.

### 2.1 Comparaison avec une intégrale

**Proposition 11.** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue par morceaux décroissante. Alors la suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $s_n = \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt$  converge. En particulier, la série

$\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  ont même nature.

**Application 12.** La série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

La série de Bertrand  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$  converge ssi  $\alpha > 1$  ou  $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$ .

### 2.2 Comparaisons de séries

**Proposition 13.** Soit  $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ , ou  $u_n = O(v_n)$ .

— Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  aussi.

— Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  aussi.

**Proposition 14.** Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n$  positives telles que  $u_n \sim v_n$ .

Alors les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  sont de même nature, et

— Si elles convergent, alors  $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$ .

— Si elles divergent, alors  $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$ .

**Contre-exemple 15.** On pose, pour tout  $n \geq 1, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, v_n = u_n + \frac{1}{n}$ . On a

$u_n \sim v_n$  mais  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge.

**Application 16.** Il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

## 2.3 Comparaison logarithmique

**Proposition 17.** Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  séries à termes strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ . Alors, la divergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  implique celle de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ , et la convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  implique celle de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

**Proposition 18** (D'Alembert). Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  séries à termes strictement positifs telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \in [0, +\infty]$ . Alors, si  $\lambda > 1$ , la série diverge, si  $\lambda < 1$ , la série converge. Si  $\lambda = 1$ , on ne peut rien conclure.

**Exemple 19.** Si  $\forall n, u_n = n, v_n = \frac{1}{n+1}$ , on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$  mais la première diverge, la seconde converge.

**Proposition 20** (Cauchy). Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  séries à termes strictement positifs telle que  $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \in [0, +\infty]$ . Alors, si  $\lambda > 1$ , la série diverge, si  $\lambda < 1$ , la série converge. Si  $\lambda = 1$ , on ne peut rien conclure.

La règle de Cauchy contient celle de D'Alembert.

**Exemple 21.** On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \frac{1}{3^{2n}}, u_{2n+1} = \frac{4}{3^{2n+1}}$ . La règle de Cauchy permet de conclure la convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ , mais pas la règle de D'Alembert.

## 3 Séries semi-convergentes

**Proposition 22** (Série télescopique). La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$  converge, si et seulement si,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Application 23** (Stirling). Si on pose, pour tout  $n \geq 1, u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  converge, et il existe  $k > 0$  tel que  $n! \sim k\sqrt{n}(n/e)^n$ .

**Application 24.** La marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$  et sur  $\mathbb{Z}^2$  est récurrente.

**Proposition 25** (Séries alternées). On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive, décroissante et converge vers 0. Alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n u_n$  converge, et  $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ .

**Application 26.** La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  converge pour  $\alpha > 0$ .

**Proposition 27** (Cauchy). Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  sont deux séries convergentes.

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$ .

**Proposition 28** (Règle d'Abel). On considère la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$ . Si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  est bornée et si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend en décroissant vers 0, alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$  converge.

**Application 29.** La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$  converge.

## 4 Fonctions définies par des séries

### 4.1 Séries entières

**Définition 30.** On appelle série entière une série de fonctions de la forme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  où  $z$  est une variable complexe et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

**Théorème 31** (Abel). S'il existe  $z_0 \in \mathbb{C}^*$  tel que la suite  $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée, alors pour tout  $z$  tel que  $|z| < |z_0|$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  converge absolument.

**Définition 32.** On définit alors le rayon de convergence de la série entière par  $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ .

**Proposition 33.** Si  $r \in ]0, R[$ , la série entière converge normalement sur  $\overline{D}(0, r)$ .

**Théorème 34** (Abel).

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  série entière de rayon de convergence  $R \geq 1$ , telle que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge.

On note  $f$  la somme de la série sur le disque unité. Soit  $\alpha \in ]0, \pi/2[$ , on pose  $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \theta \in [-\alpha, \alpha], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$ .

Alors  $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_\alpha}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

**Application 35.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ .

**Théorème 36** (taubérien faible). Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  série entière de rayon de convergence 1, soit  $f$  sa somme. On suppose que  $S := \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} f(z)$  existe, et que  $a_n = o(\frac{1}{n})$ .

Alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$ .

## 4.2 Séries de Fourier

On note  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et on identifie les fonctions  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  aux fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -périodiques.

**Définition 37.** Si  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , on définit son  $n$ -ème coefficient de Fourier par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt. \text{ On appelle série de Fourier de } f \text{ la série } \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n.$$

**Proposition 38.**  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  forme une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{T})$ .

**Théorème 39** (Parseval). Si  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , on a  $\|f\|_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ .

**Théorème 40** (Dirichlet). Si  $f$  est continue, de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement vers  $f$  dans  $(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ .

**Théorème 41** (Poisson). Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on note  $\forall n \in \mathbb{Z}, f_n : x \mapsto f(x+n)$ . Alors

la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$  CVN sur tout compact et  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$ .

**Application 42.** La fonction  $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$  vérifie  $\forall t > 0, \theta(1/t) = \sqrt{t} \theta(t)$ .

## Développements

- Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}^2$ .
- Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible.
- Formule sommatoire de Poisson.

## Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [3] B. Hauchecorne, LES CONTRE-EXEMPLES EN MATHÉMATIQUES, Ellipses.
- [4] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.