

## 229. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Soit  $D$  partie de  $\mathbb{R}$ , soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

### 1 Fonctions monotones

#### 1.1 Premières définitions et propriétés

**Définition 1.**  $f$  est dite croissante (resp. strictement croissante) si pour tous  $x, y \in D$ ,  $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$  (resp.  $f(x) < f(y)$ ). Elle est dite décroissante si  $-f$  est croissante. Elle est dite (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou décroissante.

**Exemple 2.**  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$  mais pas sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Exemple 3.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  espace probabilisé,  $X$  variable aléatoire réelle. Sa fonction de répartition, définie par  $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ , est croissante.

**Proposition 4.** Une somme de fonctions croissantes est croissante. Le produit de deux fonctions croissantes positives est croissant. Le produit d'une fonction croissante par un réel positif est croissant. La composée de deux fonctions de même monotonie est croissante. L'application réciproque d'une bijection croissante est croissante. Une limite simple de fonctions croissantes est croissante.

**Exemple 5.**  $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$  est croissante, d'où  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  aussi.

**Application 6.** Supposons  $I$  stable par  $f$ . On considère une suite définie par  $u_0 \in I$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ . Si  $f$  croissante, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone. Si  $f$  décroissante, alors  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  sont monotones.

**Théorème 7.** Une fonction strictement monotone est injective.

**Proposition 8.** Toute fonction croissante  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  admet un point fixe.

#### 1.2 Existence de limites, continuité

**Théorème 9** (Limite monotone). Supposons  $f$  monotone, soit  $a \in \mathbb{R}$  tel qu'il soit adhérent à  $D \cap ] -\infty, a[$ . Alors  $f$  admet une limite (finie ou infinie) à gauche en  $a$ .

**Corollaire 10.** Si  $f$  croissante,  $f$  admet une limite finie à gauche en  $a$ , si et seulement si,  $f$  majorée sur  $D \cap ]a, -\infty[$ .

**Corollaire 11.** Si  $D$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  monotone et  $a \in \overset{\circ}{D}$ , alors  $f$  a une limite finie à gauche en  $a$ .

**Théorème 12.** Si  $I$  intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monotone, l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.

**Exemple 13.** Soit  $(q_n)_n$  une énumération de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . On pose, pour  $x \in [0, 1]$ ,  $f_n(x) = 2^{-n} \mathbf{1}_{q_n < x}$ . La fonction  $f : \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est bien définie, strictement croissante et discontinue en tout point de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ .

**Théorème 14.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monotone. Alors  $f$  continue, si et seulement si,  $f(I)$  est un intervalle.

**Contre-exemple 15.**  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \mathbf{1}_{[0, 1[}(x)$  prolongée par 1-périodicité à  $\mathbb{R}$  vérifie que  $f(\mathbb{R})$  est un intervalle mais  $f$  non continue.

**Proposition 16.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictement monotone continue. Alors  $J = f(I)$  intervalle et  $f : I \rightarrow J$  est un homéomorphisme.

#### 1.3 Aspects différentiels

**Proposition 17.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On a  $f$  constante ssi  $\forall t \in \overset{\circ}{I}, f'(t) = 0$ , et  $f$  croissante ssi  $\forall t \in \overset{\circ}{I}, f'(t) \geq 0$ .

**Théorème 18.**  $f$  est strictement croissante ssi  $\forall t \in \overset{\circ}{I}, f'(t) \geq 0$  et si  $\{f' = 0\}$  est d'intérieur vide.

**Exemple 19.**  $f : t \mapsto t^3$  est strictement croissante même si  $\{f' = 0\} \neq \emptyset$ .

**Théorème 20** (admis). Si  $f$  est monotone, elle est dérivable  $\lambda$ -presque partout.

### 2 Fonctions convexes

#### 2.1 Définition et caractérisations

Soit  $C$  partie convexe de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Définition 21.**  $f$  est dite convexe si pour tous  $x, y \in C, t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ . Elle est dite strictement convexe si lors que l'inégalité est stricte dès lors que  $t \in ]0, 1[$  et  $x \neq y$ . Elle est dite (strictement) concave si  $-f$  est (strictement) convexe.

**Remarque 22.** La convexité signifie que le graphe de  $f$  est en-dessous de la corde  $(x, f(x)), (y, f(y))$ .

**Proposition 23.**  $f$  est convexe ssi son épigraphe  $\{(x, y) \in C \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$  est convexe.

On suppose  $C = I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Pour  $x \in I$ , on définit  $\tau_{f,x} : I \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ .

**Proposition 24.** On a équivalence entre :

- (i).  $f$  est convexe.
- (iii). Pour tous  $x, y, z \in I, x < y < z \Rightarrow \tau_{f,x}(y) \leq \tau_{f,x}(z) \leq \tau_{f,y}(z)$ .
- (iv). Pour tout  $a \in I, \tau_{f,a}$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$ .

**Exemple 25.**  $x \mapsto \exp(x), x \mapsto |x|$  sont strictement convexes.  $x \mapsto \ln(x)$  est strictement concave.

**Théorème 26.** Si  $f$  convexe sur  $I$ , alors  $f$  est continue et possède une dérivée à droite et à gauche en tout point de  $I$ , et les fonctions dérivées sont croissantes.

**Corollaire 27.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Elle est convexe sur  $I$  si et seulement si elle est continue et admet une dérivée à droite croissante.

Le graphe de  $f$  est donc au-dessus de ses tangentes.

**Corollaire 28.** Si  $f$  deux fois dérivable, elle est convexe ssi  $f'' > 0$  sur  $I$ .

On suppose  $C$  ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 29.** Si  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $f$  est convexe ssi  $\forall x, y \in C, f(y) - f(x) \geq df(x)(y - x)$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $f$  convexe ssi  $\forall x \in C, d^2f(x)$  est positive.

## 2.2 Propriétés des fonctions convexes

**Proposition 30** (Jensen discrète). Soient  $x_1, \dots, x_p \in C, \lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0$  tels que

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1. \text{ Alors } f\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^p \lambda_j f(x_j).$$

**Proposition 31** (Jensen intégrale). Soit  $g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{convexe. Alors } \varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(g(t)) dt.$$

**Proposition 32.** Toute fonction convexe et majorée est constante.

**Proposition 33.** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  convexe. Alors  $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  existe (dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ), et si  $\ell < +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \ell x$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Application 34.** Soit  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strictement négative. On considère l'EDO  $y'' + qy = 0$ . Alors la seule solution bornée est la fonction nulle, et toute autre solution possède au plus un zéro sur  $\mathbb{R}$ .

## 3 Applications

### 3.1 Inégalités de convexité

**Proposition 35** (Inégalité arithmético-géométrique). Soient  $x_1, \dots, x_n > 0$ . On a

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

**Proposition 36** (Hölder). Soit  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  espace mesuré, soient  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables positives. On a  $\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}$  pour  $p, q \geq 1$  vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Corollaire 37** (Minkowski). Pour  $p \geq 1, f \mapsto \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}$  définit une norme sur  $L^p(\mu)$ .

**Proposition 38.** Soient  $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \alpha \in [0, 1]$ . Alors  $\det((1 - \alpha)A + \alpha B) \geq \det(A)^{1-\alpha} \det(B)^\alpha$ , avec inégalité stricte si  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $A \neq B$ .

### 3.2 Optimisation

**Proposition 39.** Soient  $C$  convexe de  $\mathbb{R}^n, f : C \rightarrow \mathbb{R}$  convexe différentiable,  $\bar{x} \in C$ . Alors  $f$  atteint un minimum local en  $\bar{x}$  si et seulement si  $df(\bar{x}) = 0$ .

**Proposition 40.** Si de plus  $f$  strictement convexe, elle atteint un minimum global en au plus un point.

**Théorème 41** (John-Loewner). Soit  $K$  compact d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant  $K$ .

### 3.3 Processus de Galton-Watson

**Théorème 42** (Galton-Watson). On considère un processus défini par  $Z_0 = 1$  et

$\forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n,i}$  où  $(Y_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}}$  suite de variables aléatoires iid à valeurs dans

$\mathbb{N}$ , dont on note  $g$  la fonction génératrice.  $g$  est convexe. Si  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = 0\}$  et

$m = \mathbb{E}[Y]$ , on a :

- Si  $m \leq 1$ ,  $\mathbb{P}(A) = 1$ .
- Si  $m > 1$ , on a  $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ .

### Développements

- Ellipsoïde de John-Loewner.
- Processus de Galton-Watson.

### Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [3] I. Nourdin, AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES - ÉPREUVE ORALE, Dunod.
- [4] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES - TOME 3, Masson.