

228. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

Introduction : Pendant longtemps, les mathématiciens ont cru que continuité et dérivabilité étaient des propriétés équivalentes. Cette leçon vise à illustrer ces deux notions par des exemples et contre-exemples.

1 Continuité

1.1 Généralités

Soit A partie de \mathbb{R} .

Définition 1. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$. On dit que f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. f est continue sur A si elle est continue en tout point de A . On note $\mathcal{C}^0(A)$ l'ensemble des fonctions continues sur A .

Exemple 2.

- $\forall n \in \mathbb{N}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ continue sur \mathbb{R} .
- $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ continue sur \mathbb{R}_+ .
- $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ continue sur \mathbb{R}_+^* .

Contre-exemple 3. $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue nulle part sur \mathbb{R} .

Proposition 4. $\mathcal{C}^0(I)$ est une \mathbb{R} -algèbre.

Théorème 5 (Caractérisation séquentielle). f est continue en $a \in A$ ssi, pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.

Définition 6. Soit $k > 0$. On dit que f est k -lipschitzienne si $\forall x, y \in A, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$. On dit qu'elle est uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in A^2, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Proposition 7. f lipschitzienne $\Rightarrow f$ uniformément continue $\Rightarrow f$ continue.

Contre-exemple 8. $\sqrt{\cdot}$ uniformément continue mais pas lipschitzienne sur \mathbb{R}_+ , et $x \mapsto x^2$ continue non uniformément continue.

1.2 Prolongement par continuité

Définition 9. Soit B contenant A . On dit que f est prolongeable par continuité à B s'il existe $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $g|_A = f$.

Proposition 10. Si $f \in \mathcal{C}(A \setminus \{a\})$ et que $\lim_a f$ existe et est finie, alors f est prolongeable par continuité à A .

Exemple 11. $f \begin{cases}]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \sin(1/x) \end{cases}$ se prolonge par continuité en 0.

Contre-exemple 12. $f \begin{cases}]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(1/x) \end{cases}$ ne se prolonge pas.

Définition 13. Si f continue sur $A \setminus \{a\}$, on dit que :

- f a une discontinuité apparente en a si elle est prolongeable par continuité en a .
- f a une discontinuité de première espèce en a si $\lim_{a-} f, \lim_{a+} f$ existent, sont finies et différentes.
- f a une discontinuité de seconde espèce en a dans les autres cas.

Exemple 14. La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ si $x \neq 0, f(0) = 0$ a une discontinuité de seconde espèce en 0. La fonction partie entière n'a que des discontinuités de première espèce.

1.3 Connexité et compacité

Théorème 15 (Valeurs intermédiaires). Si I intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f(I)$ est un intervalle.

Application 16 (Brouwer). Toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a un point fixe.

Théorème 17. L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Application 18. Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$, on définit sa norme uniforme $\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$, et $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_{\infty})$ est un espace de Banach.

Théorème 19 (Heine). Si f est continue sur un segment, alors f est uniformément continue sur ce segment.

2 Dérivabilité

2.1 Généralités

Soit I intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Définition 20. On dit que f est dérivable à gauche (resp. à droite) en $a \in I$ si $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (resp. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$) existe et est finie. On note alors respectivement ces limites $f'_g(a), f'_d(a)$. On dit que f est dérivable en a si elle l'est à gauche et à droite et que $f'_g(a) = f'_d(a)$. On note alors $f'(a)$ cette limite. Si f dérivable sur A , on appelle fonction dérivée $f' : a \mapsto f'(a)$.

Exemple 21. $f : x \mapsto x^n$ dérivable sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{x}$ dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Proposition 22. Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables en a , alors $f + g, fg$ et (si $g(a) \neq 0$) $\frac{f}{g}$ sont dérivables en a , et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), (fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a), (\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$. Si g dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Exemple 23. Les fonctions polynomiales sont dérivables sur \mathbb{R} .

Proposition 24. Si f dérivable à gauche et à droite en a , alors f continue en a .

Contre-exemple 25. $x \mapsto |x|$ est continue mais pas dérivable en 0.

Proposition 26. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ nulle part dérivables sur $]0, 1[$ est dense dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

2.2 Accroissements finis

Théorème 27 (Rolle). Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

Application 28. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé, alors P' l'est aussi.

Corollaire 29. Soit f continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$, telle que $f(a) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 0$. Alors il existe $c \in]a, +\infty[, f'(c) = 0$.

Théorème 30 (Accroissements finis). Si f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. En particulier, s'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Corollaire 31. Si f dérivable sur $]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si, $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$. De plus, si f' positive sur $]a, b[$, alors f croissante sur $[a, b]$.

Corollaire 32. Si f dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que f' possède une limite finie ℓ en a , alors f dérivable sur I et $f'(a) = \ell$.

2.3 Régularité, dérivées d'ordre supérieur

Définition 33. On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I si elle est dérivable sur I et que sa dérivée est continue sur I .

Contre-exemple 34. $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ dérivable sur \mathbb{R} mais f' non continue en 0.

Théorème 35 (Darboux). Si f dérivable sur I , alors $f'(I)$ est un intervalle.

Définition 36. Par récurrence, on dit que f est de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) sur I si elle est dérivable sur I et que f' est de classe \mathcal{C}^{k-1} sur I . On dit qu'elle est de classe \mathcal{C}^∞ si elle est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \geq 1$.

Exemple 37. $x \mapsto \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x)e^{-1/x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

3 Applications

3.1 Développements limités

Théorème 38 (Taylor-Young). Soit f de classe \mathcal{C}^n sur I , soit $a \in I$. Alors, lorsque $x \rightarrow a$, on a $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$.

Corollaire 39. Si f est de classe \mathcal{C}^n sur I , alors f possède un développement limité à l'ordre n en tout point de I .

Proposition 40. Si f possède un développement limité à l'ordre 1 en 0, donné par $f(x) = a_0 + a_1x + o(x)$, alors $f(0) = a_0$ et f dérivable en 0, $f'(0) = a_1$.

Contre-exemple 41. $f : x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x^2)$ si $x \neq 0, f(0) = 1$ a un développement limité à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

3.2 Convexité

Définition 42. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Elle est dite convexe si $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1] f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.

Exemple 43. $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto e^x$

sont convexes sur \mathbb{R} .

Proposition 44. Si f convexe sur I , alors pour tout $a \in \overset{\circ}{I}, f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent, et f est continue sur $\overset{\circ}{I}$.

Proposition 45. Si f dérivable sur I , alors f convexe sur I ssi f' est croissante.

3.3 Suites récurrentes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subseteq I$. On considère la suite définie par $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.

Proposition 46. Si f continue et que la suite converge vers $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.

Définition 47. On suppose f dérivable sur I , soit λ point fixe de f . Il est dit instable (resp. stable) si $|f'(\lambda)| > 1$ (resp. $|f'(\lambda)| < 1$).

Proposition 48. Si $x_n \rightarrow \lambda$ et λ point fixe instable, alors $(x_n)_n$ stationne en λ . Si λ point fixe stable, alors il existe un voisinage V de λ tel que $\forall x_0 \in V, x_n \rightarrow \lambda$.

Proposition 49 (Méthode de Newton pour les polynômes).

Soit $P(x) = (x - a_1)^{m_1} \times \cdots \times (x - a_r)^{m_r}$ fonction polynomiale, avec $a_1 < \cdots < a_r$ et $\forall i, m_i \geq 0$. Alors la suite définie par $x_0 > a_r$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$

décroît vers a_r , et :

- Si $m_r = 1, \forall \varepsilon > 0, |x_n - a_r| = o(\varepsilon^n)$.
- Si $m_r > 1, \exists c > 0, |x_n - a_r| \sim c \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$.

Développements

- Densité des fonctions continues non dérivables.
- Méthode de Newton pour les polynômes.

Références

[Gou] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.

[Hau] B. Hauchecorne, LES CONTRE-EXEMPLES EN MATHÉMATIQUES, Ellipses.

[Pom] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.