

## 226. Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples et applications.

**Introduction :** On peut obtenir beaucoup d'informations sur les suites récurrentes à partir de la fonction qui les définit. Ce type de suites se rencontre souvent dans des méthodes d'approximation.

### 1 Suites réelles

Pour  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on considère la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

#### 1.1 Deux cas particuliers

##### Suites arithmético-géométriques

**Lemme 1.** S'il existe  $r \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n, u_{n+1} = u_n + r$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$ . S'il existe  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n, u_{n+1} = qu_n$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$ .

**Définition 2.** De telles suites sont respectivement appelées suites arithmétiques et géométriques, de raison  $r$  ou  $q$ .

**Proposition 3.** S'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \times \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ , alors en posant  $\omega = \frac{b}{1-a}$ , la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_n = u_n - \omega$  est géométrique de raison  $a$ . Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n(u_0 - \omega) + \omega$ .

##### Suites homographiques

**Proposition 4.** S'il existe  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0$ , tels que  $\forall x \neq -\frac{d}{c}$ ,  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ , alors la suite est définie tant qu'aucun terme ne vaut  $-\frac{d}{c}$ , et alors :

- Si  $h$  a deux points fixes distincts, alors la suite  $\left(\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique.
- Si  $h$  possède un seul point fixe  $\alpha$ , alors la suite  $\left(\frac{1}{u_n - \alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique.

#### 1.2 Étude dans le cas général

**Proposition 5.** Si  $f$  est croissante, alors  $(u_n)_n$  est monotone. Si  $f$  est décroissante, alors  $(u_{2n})_n, (u_{2n+1})_n$  sont monotones.

**Théorème 6 (Picard).** Si  $f$  est contractante ( $k$ -lipschitzienne pour  $k < 1$ ), alors la suite converge pour tout  $u_0 \in \mathbb{R}$ .

**Lemme 7.** Si  $I$  est un segment stable par  $f$  et si  $u_0 \in I$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$  et la suite est bornée. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ , alors  $\ell$  est un point fixe de  $f$ .

**Application 8 (Galton-Watson).** On considère un processus défini par  $Z_0 = 1$  et

$\forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n,i}$  où  $(Y_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}}$  suite de variables aléatoires iid à valeurs dans

$\mathbb{N}$ , dont on note  $g$  la fonction génératrice. Alors la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$ . Ainsi, si  $\mathbb{P}(Y = 0) > 0$ ,  $m = \mathbb{E}[Y]$  et si

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = 0\}$ , on a :

- Si  $m \leq 1$ ,  $\mathbb{P}(A) = 1$ .
- Si  $m > 1$ , on a  $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ .

#### 1.3 Classification des points fixes

On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , soit  $a$  un point fixe de  $f$ .

**Théorème 9.**

- Si  $|f'(a)| < 1$ , il existe un voisinage fermé  $J$  de  $a$  stable par  $f$  tel que pour tout  $u_0 \in J \setminus \{a\}$ , la suite converge vers  $a$  et  $u_{n+1} - a \sim f'(a)(u_n - a)$ .  $a$  est dit *attractif*.
- Si  $f'(a) = 0$  et  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors on a même  $u_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}f''(a)(u_n - a)$ .  $a$  est dit *super-attractif*.
- Si  $f'(a) > 1$ , il existe  $J$  voisinage fermé de  $a$  tel que pour tout  $u_0 \in J \setminus \{a\}$ , la suite sorte de  $J$ .  $a$  est dit *répulsif*.

**Contre-exemple 10.** Si  $f(x) = 1 - x$ , le point fixe  $\frac{1}{2}$  n'est ni attractif, ni répulsif. Si  $f(x) = \sin(x)$ , on a  $f'(0) = 1$  et  $0$  est attractif. Si  $f(x) = \text{sh}(x)$ , on a  $f'(0) = 1$  et  $0$  est répulsif.

## 2 Suites vectorielles

On suppose maintenant  $u_0 \in \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

**Remarque 11.** Le théorème de Picard reste vrai dans ce cas.

#### 2.1 Critère d'attractivité

**Théorème 12.** On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a équivalence entre :

- Le rayon spectral de  $df(a)$  est strictement inférieur à 1.
- Il existe  $V$  voisinage fermé de  $a$  stable par  $f$  et une norme  $N$  sur  $\mathbb{R}^n$  tel que  $f$  soit contractante pour la norme  $N$ .

**Définition 13.**  $a$  est alors dit attractif.

**Remarque 14.** Si  $df(a) = 0$ , on a toujours convergence quadratique.

## 2.2 Cas particulier : récurrence linéaire

On suppose désormais que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , soit  $A$  sa matrice dans la base canonique. Le calcul du terme général de la suite se ramène au calcul des puissances de  $A$ .

**Remarque 15.** Si on sait diagonaliser  $A$ , on obtient  $n$  suites géométriques scalaires découplées.

**Application 16** (Suites linéaires récurrentes scalaires d'ordre  $p$ ). Soient  $u_0, \dots, u_{p-1} \in \mathbb{C}$ , on considère la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0u_n$ , où  $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{C}$ . En posant  $U_n = {}^t(u_n, \dots, u_{n+p-1})$ , on a  $U_{n+1} = CU_n$  où  $C$  est la matrice compagnon du polynôme  $X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0$ . Le calcul du terme général se ramène au calcul des racines de  $P$ .

**Exemple 17** (Ordre 2). Si  $a, b \in \mathbb{C}, u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ , on considère la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_{n+1} + bu_n$ . Soit  $P = X^2 + aX + b$ .

- Si  $P$  a deux racines distinctes  $x_1, x_2$ , alors il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$ .
- Si  $P$  a une racine double  $x$ , alors il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, u_n = (\lambda n + \mu)x^n$ .

## 3 Applications

### 3.1 Résolution approchée de systèmes linéaires

Soient  $A \in GL_n(\mathbb{C}), b \in \mathbb{C}^n$ . On cherche à résoudre le problème  $Ax - b = 0$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{C}^n$ .

**Définition 18.** Soit  $A \in GL_n(\mathbb{C})$  que l'on écrit  $A = M - N$  avec  $M$  inversible. On dit que la méthode itérative associée à cette décomposition est convergente si, pour tout  $b \in \mathbb{C}^n$ , pour tout  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ , la suite définie par  $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$  converge.

**Lemme 19.** Si la méthode converge, alors sa limite  $x$  est l'unique solution du système linéaire  $Ax = b$ .

**Proposition 20.** La méthode converge, si et seulement si,  $\rho(M^{-1}N) < 1$ .

**Théorème 21.** Si  $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$ , alors  $M^* + N$  est hermitienne. Si elle est de plus définie positive, alors la méthode itérative converge.

**Application 22.** On note  $D$  la partie diagonale de  $A$ ,  $E$  sa partie triangulaire inférieure,  $F$  sa partie triangulaire supérieure.

La méthode de Jacobi est associée à la décomposition  $M = D, N = E + F$ .

La méthode de Gauss-Seidel est associée à la décomposition  $M = D - E, N = F$ . Ainsi, si  $A$  est hermitienne définie positive, la méthode de Gauss-Seidel converge. Si de plus,  $2D - A$  est définie positive, la méthode de Jacobi converge.

**Exemple 23.** La résolution de problèmes linéaires associés à la matrice du Laplacien  $1D$ , donnée par  $A_n = n^2 \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ , peuvent se faire par Jacobi et Gauss-Seidel.

### 3.2 Méthode de la puissance

**Théorème 24.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ , dont les valeurs propres vérifient  $0 < |\lambda_1| < \dots < |\lambda_{n-1}| < \lambda_n$ . Soit  $e_n$  vecteur propre associé à  $\lambda_n$ , soit  $x_0$  tel que sa composante en  $e_n$  dans la base des vecteurs propres soit non nulle, et tel que  $\|x_0\|_2 = 1$ . On pose, pour tout  $n, x_{n+1} = \frac{Ax_n}{\|Ax_n\|_2}$ . Alors la suite  $(\|x_n\|_2)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\lambda_n$ .

**Remarque 25.** On peut aussi déterminer la plus petite valeur propre en appliquant cette méthode à  $A^{-1}$ .

### 3.3 Méthode de Newton

**Théorème 26** (Cas réel). Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . On se donne  $x_0 \in I$ , et on pose  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ . S'il existe  $\delta > 0$  tel que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] \alpha - \delta, \alpha + \delta[$  et si  $f'$  ne s'annule pas sur cet intervalle, alors pour tout  $x_0 \in ] \alpha - \delta, \alpha + \delta[$ , la suite converge quadratiquement vers  $\alpha$ .

**Exemple 27.** Si  $\alpha > 0$ , la suite définie par  $u_0 > 0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\alpha}{u_n})$  converge vers  $\sqrt{\alpha}$ .

**Contre-exemple 28.** La fonction  $f(x) = \arctan(x)$  montre qu'il n'y a pas convergence globale en général.

**Lemme 29** (Gauss-Lucas). Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Alors les racines de  $P'$  sont dans l'enveloppe convexe des racines de  $P$ .

**Théorème 30.** Soit  $P(x) = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}$  fonction polynomiale réelle, avec  $a_1 < \dots < a_r$  et  $\forall i, m_i \geq 1$ .

Pour tout  $x_0 > a_r$ , la suite de Newton  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge en décroissant vers  $a_r$ , et :

- Si  $m_r = 1$ , alors  $\forall \varepsilon > 0, |x_n - a_r| = o(\varepsilon^n)$ .

— Si  $m_r \geq 2$ , alors  $\exists c > 0, |x_n - a_r| \sim c \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$ .

**Proposition 31** (Cas vectoriel). Soit  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , telle qu'il existe  $\alpha \in \Omega$  avec  $f(\alpha) = 0$ . On suppose que  $f$  vérifie  $Jf(\alpha) \in GL_n(\mathbb{R})$ . Alors il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x_0 \in B(\alpha, \delta)$ , la suite définie par  $x_{k+1} = x_k - Jf(x_k)^{-1}f(x_k)$  soit bien définie et converge vers  $\alpha$  avec un ordre 2.

## Développements

- Processus de Galton-Watson.
- Méthodes itératives de décomposition régulière.
- Méthode de Newton pour les polynômes.

## Références

- [1] G. Allaire, S.-M. Kaber, ALGÈBRE LINÉAIRE NUMÉRIQUE, Ellipses.
- [2] J.-P. Demailly, ANALYSE NUMÉRIQUE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, EDP Sciences.
- [3] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [4] F. Rouvière, PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, Cassini.