

## 223. Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

### 1 Généralités

#### 1.1 Premières définitions et propriétés

**Définition 1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ , soit  $\ell \in \mathbb{C}$ . On dit que  $u_n$  converge vers  $\ell$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$ . Une suite non convergente est dite divergente.

**Proposition 2.** Une telle limite  $\ell$  est alors unique.

**Application 3.** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ .  $f$  continue en  $a$  ssi pour toute suite  $(u_n)_n$  convergeant vers  $a$ ,  $(f(u_n))_n$  converge vers  $f(a)$ .

**Exemple 4.** La fonction  $f : x \mapsto \sin(1/x)$  n'est pas prolongeable par continuité en 0 (prendre  $u_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ ).

**Proposition 5.** Toute suite convergente est bornée.

**Définition 6.** Si  $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , on dit qu'elle diverge vers  $+\infty$  si  $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A$ .

**Contre-exemple 7.** La suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$  n'a pas de limite.

**Proposition 8.** Opérations sur les limites.

#### 1.2 Théorèmes de convergence

**Théorème 9.** Toute suite réelle  $(u_n)_n$  croissante majorée converge vers  $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

**Théorème 10.** Si  $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$  sont trois suites réelles telles que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$  et  $(u_n)_n, (w_n)_n$  convergent vers  $\ell \in \mathbb{R}$ , alors  $(v_n)_n$  converge vers  $\ell$ . De même, si  $u_n \leq v_n$  et  $u_n \rightarrow +\infty$ , alors  $v_n \rightarrow +\infty$ .

**Exemple 11.**  $\frac{\sin(n)}{n} \rightarrow 0$ .

**Définition 12.** Deux suites réelles  $(u_n)_n, (v_n)_n$  sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si  $u_n - v_n \rightarrow 0$ .

**Proposition 13.** Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

**Exemple 14.** Si on pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ , ces deux suites sont adjacentes et convergent vers  $e$ .

**Exemple 15.** On considère  $(u_n)_n, (v_n)_n$  définies par  $0 < v_0 < u_0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n), v_n = \sqrt{u_n v_n}$ . Ces deux suites sont adjacentes.

**Application 16** (Séries alternées). Soit  $(a_n)_n$  suite décroissante et convergeant vers 0. Alors la série  $\sum (-1)^n a_n$  converge et la suite des restes  $R_n$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq a_{n+1}$ .

#### 1.3 Suites extraites et valeurs d'adhérence

**Définition 17.** Soit  $(u_n)_n$  suite. On appelle sous-suite ou suite extraite de  $(u_n)_n$  toute suite de la forme  $(u_{\varphi(n)})_n$  où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante.

**Exemple 18.**  $(u_{2n})_n, (u_{2n+1})_n$  sont deux suites extraites de  $(u_n)_n$ .

**Définition 19.** On appelle valeur d'adhérence de  $(u_n)_n$  tout élément limite d'une suite extraite de  $(u_n)_n$ .

**Exemple 20.**  $((-1)^n)_n$  possède deux valeurs d'adhérence,  $-1$  et  $1$ .

**Proposition 21.**  $\lambda$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)_n$  si  $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \lambda| < \varepsilon$ . L'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n)_n$  est  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n, n \geq k\}}$ .

**Remarque 22.** Une suite convergente n'admet que sa limite comme valeur d'adhérence. Une suite qui a deux valeurs d'adhérence distinctes diverge. Une suite qui possède une seule valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente.

**Théorème 23** (Bolzano-Weierstrass). Toute suite bornée de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  possède une valeur d'adhérence.

**Corollaire 24.** Toute suite bornée possédant une unique valeur d'adhérence converge.

**Définition 25.** Si  $(u_n)_n$  suite réelle bornée, on définit sa limite inférieure  $\liminf u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} u_k$  et sa limite supérieure  $\limsup u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} u_k$ .

Ce sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur d'adhérence de  $u$ . En particulier,  $u$  converge ssi  $\liminf u_n = \limsup u_n$ .

## 1.4 Suites de Cauchy

**Définition 26.** Une suite  $(u_n)_n$  est dite de Cauchy si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \varepsilon$ .

**Proposition 27.** Toute suite de Cauchy est bornée.

**Théorème 28.** Toute suite réelle ou complexe converge ssi elle est de Cauchy.

**Application 29.** La série  $\sum \frac{1}{n+1}$  diverge.

**Proposition 30.** L'ensemble  $\mathcal{C}$  des suites de Cauchy à valeurs dans  $\mathbb{Q}$  est un anneau.

**Proposition 31.** On définit sur  $\mathcal{C}$  une relation par  $u \sim v \Leftrightarrow u_n - v_n \rightarrow 0$ . C'est une relation d'équivalence.

**Proposition 32.** L'anneau quotient  $\mathcal{C}/\sim$  est un corps, que l'on appelle  $\mathbb{R}$ .

## 2 Suites et processus sommatoires

**Remarque 33.** L'étude de la suite  $(u_n)_n$  peut se faire via la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$ .

**Application 34** (Stirling). Si on pose, pour tout  $n \geq 1, u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ , la série

$\sum_{n \geq 1} \ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$  converge, et il existe  $k > 0$  tel que  $n! \sim k \sqrt{n} (n/e)^n$ .

### 2.1 Sommation des équivalents

**Théorème 35.** Soient  $\sum u_n, \sum v_n$  deux séries à termes positifs avec  $u_n \sim v_n$ .

— Si  $\sum u_n$  converge, alors  $\sum v_n$  aussi et  $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$ .

— Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  aussi et  $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$ .

**Application 36.** La marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}^2$  passe une infinité de fois en 0.

### 2.2 Moyenne de Cesàro

**Théorème 37.** Soit  $(u_n)_n$  suite réelle qui converge vers  $\ell$ . Alors la suite  $(v_n)_n$

définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$  converge aussi vers  $\ell$ .

**Contre-exemple 38.** Si  $u_n = (-1)^n$ ,  $(v_n)_n$  converge mais  $(u_n)_n$  diverge.

## 2.3 Séries génératrices

De nombreuses propriétés d'une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'obtiennent par l'étude de la série génératrice  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n X^n$  ou de la série génératrice exponentielle  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{n!} X^n$ .

**Exemple 39** (Rendu de monnaie). Soient  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$  premiers entre eux dans leur ensemble. Pour  $n \geq 1$ , on note  $u_n = \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k, a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n\}$ . Alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k (k-1)!} n^{k-1}$ .

## 3 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on considère la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

**Proposition 40.** Si  $f$  est croissante, alors  $(u_n)_n$  est monotone. Si  $f$  est décroissante, alors  $(u_{2n})_n, (u_{2n+1})_n$  sont monotones.

**Théorème 41** (Picard). Si  $f$  est contractante ( $k$ -lipschitzienne pour  $k < 1$ ), alors la suite converge pour tout  $u_0 \in \mathbb{R}$ .

**Lemme 42.** Si  $I$  est un segment stable par  $f$  et si  $u_0 \in I$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$  et la suite est bornée. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ , alors  $\ell$  est un point fixe de  $f$ .

**Exemple 43.** La suite définie par  $u_0 \in [0, \pi/2]$  et  $u_{n+1} = \sin(u_n)$  converge vers 0, et le théorème de Cesàro permet d'obtenir  $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ .

**Application 44** (Galton-Watson). On considère un processus défini par  $Z_0 = 1$  et

$\forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n,i}$  où  $(Y_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}}$  suite de variables aléatoires iid à valeurs dans

$\mathbb{N}$ , dont on note  $g$  la fonction génératrice. Alors la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$ . Ainsi, si  $\mathbb{P}(Y = 0) > 0$ ,  $m = \mathbb{E}[Y]$  et si

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = 0\}$ , on a :

— Si  $m \leq 1$ ,  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

— Si  $m > 1$ , on a  $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ .

**Application 45** (Newton). Soit  $P(x) = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}$  fonction polynomiale réelle, avec  $a_1 < \dots < a_r$  et  $\forall i, m_i \geq 1$ .

Pour tout  $x_0 > a_r$ , la suite de Newton  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge en décroissant vers  $a_r$ , et :

— Si  $m_r = 1$ , alors  $\forall \varepsilon > 0, |x_n - a_r| = o(\varepsilon^n)$ .

— Si  $m_r \geq 2$ , alors  $\exists c > 0, |x_n - a_r| \sim c \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$ .

## Développements

- Problème du rendu de monnaie.
- Processus de Galton-Watson.
- Méthode de Newton pour les polynômes.

## Références

- [1] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [2] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.