

## 222. Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

**Introduction** : Pas de théorie générale des EDP. C'est pourquoi on présente des méthodes d'étude à travers des exemples.

### 1 Généralités

**Définition 1.** Si  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , une équation aux dérivées partielles d'ordre  $k \in \mathbb{N}^*$  est une relation de la forme  $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_N, u, \partial_{x_1}u, \dots, \partial_{x_N}u, \dots, \partial_{x_N}^k u) = 0$ , où  $u$  fonction de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$ . Elle est dite linéaire si  $\mathcal{F}$  est linéaire par rapport à  $u$  et ses dérivées. Elle est dite homogène si  $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_N, 0, \dots, 0) = 0$ .

**Définition 2** (Classification des équations d'ordre 2). Soient  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $a, b, c$  trois fonctions  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . On considère une EDP d'ordre 2 de la forme (E)  $a(x, y)\partial_{xx}^2 f + b(x, y)\partial_{xy}^2 f + c(x, y)\partial_{yy}^2 f + F(x, y, f, \partial_x f, \partial_y f) = 0$ .

- Si  $b^2 - ac < 0$  sur  $\Omega$ , (E) est dite hyperbolique.
- Si  $b^2 - ac = 0$  sur  $\Omega$ , (E) est dite parabolique.
- Si  $b^2 - ac > 0$  sur  $\Omega$ , (E) est dite elliptique.

### 2 Exemples d'EDP linéaires d'ordre 1

#### 2.1 Un premier exemple

On considère l'EDP  $x\partial_x f - y\partial_y f = x^2 y^3$  sur l'ouvert  $\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ . Cette équation peut être résolue par changement de variables, en posant  $(u, v) = \varphi(x, y) = (x, xy)$  (ce qui définit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sur  $\Omega$ ). Alors, si  $f = g \circ \varphi$ , l'équation est équivalente à  $\forall u, v \in \Omega, \partial_u g = \frac{v^3}{u^2}$ . Cela se résout en  $g(u, v) = -\frac{v^3}{u} + G(v)$ , soit  $f(x, y) = -x^2 y^3 + G(xy)$  où  $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ .

#### 2.2 L'équation de transport

Si  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ , on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + c(t, x)\partial_x u(t, x) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Définition 3.** Pour  $\xi \in \mathbb{R}$ , on appelle courbe caractéristique partant de  $\xi$  la courbe paramétrique  $(t, x(t))$  où  $x$  est solution du problème de Cauchy  $x'(t) = c(t, x(t)), x(0) = \xi$ .

**Proposition 4.** Si une telle courbe existe, et si  $u$  solution  $\mathcal{C}^1$  de l'équation de transport, alors  $t \mapsto u(t, x(t))$  est constante.

Cas d'une vitesse constante

On considère ici  $c(x, y) = c = \text{constante}$ .

**Proposition 5.** Les courbes caractéristiques sont définies pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , et ce sont des droites données par  $x(t) = \xi + ct$ .

**Corollaire 6.** La solution du problème de Cauchy est donnée par  $u(t, x) = u_0(x - ct)$ .

Cas d'une vitesse non constante

La méthode des caractéristiques peut encore s'appliquer, mais l'existence des courbes caractéristiques pour tout  $(t, \xi)$  n'est pas assurée.

**Exemple 7.** On considère  $c(t, x) = \frac{x}{t^2 + 1}$ . Les courbes caractéristiques sont alors définies pour tout  $(t, \xi)$  et sont données par  $x(t) = \xi \exp(\arctan(t))$ . Les solutions sont alors données par  $u(t, x) = u_0(x \exp(-\arctan(t)))$ .

**Contre-exemple 8.** Si  $c(x, t) = x^2 - 1$ , il existe  $t^*$  tel que  $\lim_{\substack{t \rightarrow t^* \\ t < t^*}} = +\infty$ . Alors la fonction  $t \mapsto u(t, x(t))$  n'est pas définie au-delà de  $t^*$  et la méthode tombe en défaut.

### 3 Exemples d'EDP d'ordre 2

#### 3.1 Une EDP hyperbolique : l'équation des ondes

Le problème de Cauchy pour l'équation des ondes s'écrit  $\partial_{tt}^2 u - c^2 \Delta u = 0$  pour  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(0, x) = v_0(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Résolution en dimension 1

**Remarque 9.** Lorsque  $n = 1, \partial_{tt}^2 - c^2 \Delta = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)$ .

Si  $u$  est solution, la fonction  $w := \partial_t u - c\partial_x u$  est solution de l'équation de transport  $\partial_t w + c\partial_x w = 0, w(0, x) = v_0(x) - cu_0'(x)$ , qui peut se résoudre d'après ce qui précède.  $u$  est alors solution de  $\partial_t u - c\partial_x u = w, u(0, x) = u_0(x)$ . Cette équation peut se résoudre par la méthode des caractéristiques.

**Proposition 10.** La solution du problème de Cauchy est donnée par

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left( u_0(x + ct) + u_0(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\tau) d\tau \right).$$

**Remarque 11.** On voit apparaître deux phénomènes de propagation d'onde, l'une à la vitesse  $+c$ , l'autre à la vitesse  $-c$ .

**Définition 12.** On appelle domaine de dépendance de  $(t, x)$  l'intervalle  $[x-ct, x+ct]$ . En effet,  $u(t, x)$  ne dépend que des valeurs de  $u_0, v_0$  dans le domaine de dépendance.

**Définition 13.** On appelle domaine d'influence de  $x_0 \in \mathbb{R}$  le cône  $C_{x_0} = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, |x - x_0| \leq ct\}$ . En effet, le calcul de la solution en tout point de ce cône utilise les valeurs de  $u_0, v_0$  en  $x_0$ .

## 3.2 Exemples de problèmes elliptiques

### 3.2.1 Fonctions harmoniques

**Définition 14.** Soit  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$ .  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$  est dite harmonique si  $\Delta f = 0$  sur  $\Omega$ .

**Exemple 15.**  $(x, y) \mapsto \log(\sqrt{x^2 + y^2})$  est harmonique sur  $(\mathbb{R}^*)^2$ .

**Remarque 16.** Pour  $N = 2$ , on peut identifier  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  à  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  en posant  $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$ .

**Proposition 17.** Avec cette identification, la partie réelle d'une fonction holomorphe est harmonique.

**Définition 18.** Soient  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ . On dit qu'elle vérifie la propriété de la moyenne si pour tous  $a \in U, r > 0$  tel que  $\overline{D}(a, r) \subseteq U$ ,  $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$ .

**Théorème 19.**  $f$  est harmonique, si et seulement si, elle vérifie la propriété de la moyenne.

### 3.2.2 Solutions faibles du problème de Dirichlet

**Définition 20.** Un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit régulier s'il existe  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, (f(x), \nabla f(x)) \neq (0, 0)$ , et  $\Omega = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ . On pose alors  $n(x) = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ .

**Théorème 21 (Green).** Si  $u, v \in H^2(\overline{\Omega})$  avec  $\Omega$  régulier, on a

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v dx.$$

On considère le problème de Dirichlet  $-\Delta u + u = f$  sur  $\Omega$ ,  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ , où  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in L^2(\Omega)$ . On pose, pour  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx$  et

$$\ell(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

**Définition 22.** On dit que  $u \in H^2(\Omega)$  est solution faible du problème si  $\forall v \in H_0^1(\Omega), a(u, v) = \ell(v)$ .

**Proposition 23 (Lax-Milgram).** Le problème possède une unique solution faible.

**Proposition 24.** Celle-ci est aussi solution du problème de départ.

## 3.3 Une EDP parabolique : l'équation de la chaleur

On considère maintenant le problème  $\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$  où  $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ .

Solution sur  $\mathbb{R}^n$

On suppose que toutes les dérivées admettent des transformées de Fourier partielles en  $x$  pour tout  $t$ . On a alors pour tous  $(t, \xi)$ ,  $\frac{d\hat{u}}{dt}(t, \xi) = -\alpha \|\xi\|^2 \hat{u}(t, \xi)$ .

**Proposition 25.** La fonction définie par  $u(t, x) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\alpha t}} u_0(x-s) ds$  est solution.

Solution sur  $\mathbb{T}$

On suppose  $x \in [0, 2\pi]$  et on impose des conditions aux limites périodiques :  $\forall t \geq 0, u(t, 0) = u(t, 2\pi)$ .

**Proposition 26.** Si  $u_0$  est continue,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, alors il existe une unique solution continue,  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[$ , donnée par  $u(t, x) = u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}$

où  $d_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(x) e^{-inx} dx$ .

**Corollaire 27.** Si  $u_0$  non constante, il n'y a pas de solution bornée.

Approximation numérique

On peut approcher les solutions sur un domaine spatial borné en approximant les dérivées par des différences finies. On se fixe un pas de temps  $\Delta t$  et un pas spatial  $\Delta x$ .

**Exemple 28.** On définit le schéma d'Euler explicite pour cette équation :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0.$$

## Développements

- Équation de transport avec terme source + équation des ondes.
- Équation de la chaleur avec conditions aux limites périodiques.

## Références

- [1] E. Amar, E. Matheron, ANALYSE COMPLEXE, Cassini.
- [2] C. David, P. Gosselet, ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, Dunod.
- [3] L. Di Menza, ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, Cassini.
- [4] S. Francinou et al., ORAUX X-ENS ANALYSE 4, Cassini.
- [5] B. Lucquin, ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET LEURS APPROXIMATIONS, Ellipses.