

221. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Introduction : Les EDO linéaires sont une classe d'EDO "simple" qui apparaît en modélisation, naturellement ou en remplaçant une EDO par sa linéarisée autour d'un équilibre.

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et I un intervalle de \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Généralités

1.1 Existence et unicité des solutions

Définition 1. On appelle équation différentielle linéaire d'ordre p toute équation différentielle de la forme $X^{(p)}(t) = A_{p-1}(t)X^{(p-1)}(t) + \dots + A_0(t)X(t) + B(t)$, où $t \in I$, $A_0, \dots, A_{p-1} : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ continues, d'inconnue $X : I \rightarrow \mathbb{K}^n$. Si $B \equiv 0$, l'équation est dite homogène.

Exemple 2 (Oscillateur harmonique amorti). Si une masse ponctuelle m est suspendue à un ressort de coefficient de rappel F et d'amortissement k , le déplacement vertical x à partir de la position d'équilibre vérifie $x'' = -\frac{k}{m}x' - \frac{F}{m}x$.

Remarque 3. En posant

$$Y = \begin{pmatrix} X \\ X' \\ \vdots \\ X^{(p-1)} \end{pmatrix}, \tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \dots & \dots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix}, \tilde{B}(t) =$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$, on se ramène à une équation d'ordre 1 $Y'(t) = \tilde{A}(t)Y(t) + \tilde{B}(t)$.

On ne considérera donc que des équations d'ordre 1.

Exemple 4. L'équation précédente se réécrit ainsi $x' = y$, $y' = -\frac{k}{m}y - \frac{F}{m}x$.

Théorème 5 (Cauchy-Lipschitz). Pour tous $t_0 \in I$, $Y_0 \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique fonction $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ satisfaisant $\forall t \in I$, $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ et $Y(t_0) = Y_0$.

Contre-exemple 6. Le problème $y'(t) = y(t)^2$, $y(0) = 1$ n'admet pas de solution sur \mathbb{R} entier. Le problème $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$, $y(0) = 0$ admet deux solutions distinctes définies sur \mathbb{R} entier.

1.2 Structure de l'espace des solutions

Proposition 7 (Superposition). Si Y_1 est solution de $Y'(t) = A(t)Y(t) + B_1(t)$ et Y_2 solution de $Y'(t) = A(t)Y(t) + B_2(t)$ alors $Y_1 + Y_2$ solution de $Y'(t) = A(t)Y(t) + (B_1(t) + B_2(t))$.

Théorème 8. L'ensemble des solutions du système homogène $Y'(t) = A(t)Y(t)$ est un sous-espace vectoriel de dimension n du \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Corollaire 9. L'ensemble des solutions de $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ est un sous-espace affine de dimension n .

Contre-exemple 10. On considère l'équation $ty'(t) - 3y(t) = 2t^5$.

Si on pose $\varphi(t) = t^3 \mathbf{1}_{t \leq 0}$, $\psi(t) = t^3 \mathbf{1}_{t \geq 0}$ et $g(t) = t^5$, alors l'ensemble des solutions est $\mathcal{P} = \{g + \lambda\varphi + \mu\psi, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ qui est un plan affine de dimension 2 bien que l'équation soit scalaire d'ordre 1.

Définition 11. On appelle système fondamental de solutions de l'équation homogène $Y'(t) = A(t)Y(t)$ toute famille de fonctions (V_1, \dots, V_n) formant une base de l'espace vectoriel des solutions.

Définition 12. Si V_1, \dots, V_n sont des solutions de l'équation homogène, on définit leur Wronskien $W : t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t))$.

Théorème 13. V_1, \dots, V_n forment un système fondamental de solutions ssi il existe t_0 tel que $W(t_0) \neq 0$, et alors $\forall t \in I$, $W(t) \neq 0$.

Proposition 14. Le Wronskien vérifie $\forall t \in I$, $W'(t) = \text{tr}(A(t))W(t)$.

2 Méthodes d'étude et de résolution

2.1 Résolution dans le cas des coefficients constants

Proposition 15. La solution du problème homogène $Y'(t) = AY(t)$, $Y(t_0) = Y_0$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est donnée par $Y(t) = \exp((t - t_0)A)Y_0$.

Corollaire 16. Si A est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et de vecteurs propres associés V_1, \dots, V_n , alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} V_k.$$

Pour déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre $Y'(t) = AY(t) + B(t)$, on la cherche sous la forme $Y(t) = \exp(tA)V(t)$ où V de classe \mathcal{C}^1 .

Proposition 17. La solution générale du problème de Cauchy est alors

$$Y(t) = \exp((t - t_0)A)Y_0 + \int_{t_0}^t \exp((t - s)A)B(s)ds.$$

Remarque 18. Dans le cas particulier d'une EDO linéaire scalaire d'ordre p , la matrice A est une matrice compagnon. On est ainsi réduit à chercher les racines de $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0$.

Théorème 19. Si P a pour racines $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, de multiplicités m_1, \dots, m_r alors un système fondamental de solutions de l'équation homogène est donné par les fonctions $t \mapsto t^{q_j} e^{\lambda_j t}$, $1 \leq j \leq r$, $0 \leq q_j \leq m_j - 1$.

Exemple 20. Pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, un système fondamental de solutions de $y''(t) = -4(y) + \tan(t)$ est donné par $t \mapsto \cos(2t)$, $t \mapsto \sin(2t)$. La méthode de variation des constantes donne la solution particulière $y(t) = -\frac{t}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \ln(\cos(t))$.

2.2 Résolution dans le cas des coefficients variables

Définition 21. Pour $t_0 \in I$, on définit la résolvante comme l'unique application dérivable $R_{t_0} : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall t \in I, R'_{t_0}(t) = A(t)R_{t_0}(t)$, $R_{t_0}(t_0) = I_n$.

Lemme 22. On a, pour tous t_0, t_1, t_2 , $R_{t_0}(t_1)R_{t_2}(t_0) = R_{t_2}(t_1)$.

Corollaire 23. La résolvante est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition 24. L'unique solution de $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$, $Y(t_0) = y_0$ est

$$Y(t) = R_{t_0}(t)y_0 + R_{t_0}(t) \int_{t_0}^t R_{t_0}(s)^{-1}B(s)ds.$$

Exemple 25. En dimension 1, la solution de $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ est

$$y(t) = y_0 \exp(\alpha(t)) + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t)-\alpha(s)}b(s)ds, \text{ où } \alpha(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds.$$

On se ramène à un calcul de primitives, ce qui n'est pas forcément plus simple. On peut aussi chercher une solution développable en série entière.

Exemple 26 (Équation de Bessel). On considère l'équation différentielle linéaire (E) $xy'' + y' + xy = 0$. Cette équation admet des solutions DSE, données par

$$f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}, a_0 \in \mathbb{R}. \text{ De plus, si on note } f_0 \text{ la solution DSE vérifiant}$$

$f(0) = 1$ et si f est une solution sur $]0, a[$, on a (f, f_0) libre ssi f non bornée au voisinage de 0.

Application 27 (Wallis). $\int_0^\pi \sin(\theta)^{2k} d\theta = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

2.3 Étude qualitative

Proposition 28 (Gronwall). Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}_+)$, $c \geq 0$ tels que $\forall t \in [a, b], y(t) \leq c \int_a^t \psi(s)y(s)ds$. Alors $\forall t \in [a, b], y(t) \leq \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$.

Application 29. Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ strictement positive et croissante. Alors toutes les solutions de $y'' + qy = 0$ sont bornées sur \mathbb{R}_+ .

Définition 30. On considère l'EDO $y'(t) = f(t, y(t))$ où $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, soit $t_0 \in I$. On note $y(t, z)$ la solution maximale vérifiant $y(t_0) = z$. Soit $z_0 \in I$ tel que $y(t, z_0)$ soit définie sur $[t_0, +\infty[$. Cette solution sera dite stable s'il existe $r > 0$ et $C \geq 0$ telles que

(i). $\forall z \in \overline{B}(z_0, r)$, $y(\cdot, z)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$.

(ii). $\forall t \in [t_0, +\infty[$, $z \in \overline{B}(z_0, r)$, on a $\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq C\|z - z_0\|$.

Elle est dite asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe $\gamma : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\lim_{+\infty} \gamma = 0$ et $\forall t \in [t_0, +\infty[$, $z \in \overline{B}(z_0, r)$, $\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq \gamma(t)\|z - z_0\|$.

Proposition 31. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres complexes. Alors les solutions de $Y' = AY$ sont :

- Asymptotiquement stables si $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \Re(\lambda_j) < 0$.
- Stables si $\forall j, \Re(\lambda_j) < 0$ ou $\Re(\lambda_j) = 0$ et la matrice induite sur le sous-espace propre est diagonalisable.

Exemple 32 (en dimension 2). Si $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, de valeurs propres λ, μ :

- Si λ, μ sont réelles de même signe, on a un nœud impropre, instable si > 0 , stable si < 0 .
- Si λ, μ réelles de signes opposés, on a un col (instable).
- Si $\lambda = \mu$ et A diagonalisable, on a un nœud propre (stable ou instable comme précédemment).
- Si $\lambda = \mu$ et A diagonalisable, on a un nœud exceptionnel (stable ou instable comme précédemment).
- Si λ, μ non réelles, on a un foyer stable ou instable ou un centre.

3 Applications

3.1 Stabilité des équilibres de systèmes non linéaires

Théorème 33 (Lyapunov). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ vérifiant $f(0) = 0$. Si $df(0)$ a toutes ses valeurs propres à partie réelle négative strictement, alors il existe V voisinage de 0 tel que pour tout $x \in V$, la solution de $y' = f(y)$, $y(0) = x$ tend vers 0 en $+\infty$.

Contre-exemple 34. On considère le système $\begin{cases} x' &= \alpha x^3 \\ y' &= \beta y^3 \end{cases}$. $(0, 0)$ est un équilibre où la jacobienne est nulle. Il est asymptotiquement stable si $\alpha, \beta < 0$ et instable si $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$.

3.2 Commandabilité d'un système linéaire

Définition 35. On appelle équation différentielle linéaire commandée une équation de la forme $x'(t) = Ax(t) + u(t)b$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. La fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée commande.

Définition 36. Un état $v \in \mathbb{R}^n$ est dit atteignable à partir de 0 en un temps T s'il existe une solution x vérifiant $x(0) = 0, x(T) = v$. Le système est dit commandable s'il existe $T > 0$ tel que tout état soit atteignable en un temps T .

Théorème 37. Pour $T > 0$, on note $\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_{pm}^0([0, T])$. On a équivalence entre :

- (i). $(A^k b)_{0 \leq k \leq n-1}$ base de \mathbb{R}^n .
- (ii). Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe $T > 0, u \in \mathcal{C}_T$ et $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et \mathcal{C}^1 par morceaux tq $x' = Ax + ub, x(0) = 0, x(T) = v$.

Développements

- Équation de Bessel.
- Commandabilité d'un système linéaire.

Références

- [1] J.-P. Demailly, ANALYSE NUMÉRIQUE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, EDP Sciences.
- [2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS ANALYSE 4, Cassini.
- [3] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [4] I. Nourdin, AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES - ÉPREUVE ORALE, Dunod.
- [5] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.