

220. Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

Introduction : Les EDO interviennent très souvent en modélisation : dynamique de populations, modèles financiers...

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1. On appelle équation différentielle résolue d'ordre p une équation de la forme $\forall t \in I, X^{(p)}(t) = f(t, X(t), X'(t), \dots, X^{(p-1)}(t))$ d'inconnue $X \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$ où $n \in \mathbb{N}^*, I$ intervalle de $\mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. L'équation est dite linéaire si f est linéaire en ses $p - 1$ dernières variables. Elle est dite autonome si f ne dépend pas de t .

Remarque 2. En posant $Y = {}^t(X, X', \dots, X^{(p-1)})$, on se ramène à une équation d'ordre 1 de taille $np : Y'_1 = Y_2, \dots, Y'_{p-1} = Y_p, Y'_p = f(t, Y_1, \dots, Y_{p-1})$. On ne considérera donc plus que des systèmes d'ordre 1 $X' = f(t, X)$.

Définition 3. On appellera problème de Cauchy associé à ce système la recherche d'une solution vérifiant $X(t_0) = X_0$ où $t_0 \in I, X_0 \in \mathbb{R}^n$ sont donnés.

Définition 4. On appellera solution la donnée d'un intervalle $J \subseteq I$ et d'une fonction ε vérifiant $\forall t \in J, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

1.2 Existence et unicité de solutions

Définition 5. On appelle solution maximale la donnée d'une solution (J_0, φ_0) telle qu'il n'existe pas d'autre solution (J, ψ) vérifiant $J_0 \subsetneq J$ et $\varphi = \psi$ sur J_0 .

Définition 6. On dit que f est localement lipschitzienne en la seconde variable si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe V voisinage de (t_0, x_0) et $k > 0$ tels que pour tous $(t, x), (t, x') \in V, \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq k\|x - x'\|$.

Remarque 7. Si f est de classe \mathcal{C}^1 , alors elle est localement lipschitzienne.

Théorème 8 (Cauchy-Lipschitz). Si f est localement lipschitzienne en la seconde variable, alors pour tous $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale X vérifiant $X(t_0) = x_0$.

Théorème 9 (Cauchy-Peano). Si f est seulement supposée continue, alors pour tous $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe au moins une solution maximale X vérifiant $X(t_0) = x_0$.

Contre-exemple 10. Le problème de Cauchy $x' = \sqrt{|x|}, x(0) = 0$ admet deux solutions maximales : $x(0) = 0$ et $x(t) = \frac{1}{4}t^2$.

1.3 Le problème de la globalité

Définition 11. Une solution maximale est dite globale si elle est définie sur I entier.

Contre-exemple 12. Le problème de Cauchy $x' = x^2, x(0) = 1$ n'admet pas de solution définie sur \mathbb{R} entier.

Théorème 13 (Cauchy-Lipschitz global). On suppose que $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie $\forall K$ compact de $I, \exists k > 0, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, z) - f(t, y)\| \leq k\|z - y\|$. Alors il y a une solution unique, qui est de plus définie sur I entier.

Exemple 14. Si $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont continues, alors les solutions de $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ sont globales.

Proposition 15 (Gronwall). Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}_+), c \geq 0$ tels que $\forall t \in [a, b], y(t) \leq c \int_a^t \psi(s)y(s)ds$. Alors $\forall t \in [a, b], y(t) \leq \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$.

Théorème 16 (des bouts). On note $I =]a, b[$ et on suppose f localement lipschitzienne en X . Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $X' = f(t, X)$. Si $\beta < b$ (resp. si $\alpha > a$), alors pour tout K compact de \mathbb{R}^n , il existe V voisinage de β (resp. de α) dans $]\alpha, \beta[$ tel que pour tout $t \in V, \varphi(t) \notin K$.

Corollaire 17. Si f est bornée, alors les solutions maximales sont globales.

2 Résolution d'EDO

2.1 Résolution exacte dans le cas linéaire

Proposition 18. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, la solution générale du problème de Cauchy $Y'(t) = AY(t) + B(t)$ est $Y(t) = \exp((t - t_0)A)Y_0 + \int_{t_0}^t \exp((t - s)A)B(s)ds$.

Proposition 19. En dimension 1, la solution de $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ est $y(t) = y_0 \exp(\alpha(t)) + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t) - \alpha(s)} b(s)ds$, où $\alpha(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$.

Application 20 (Bernoulli). Soient I intervalle de $\mathbb{R}, a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On considère une équation de la forme $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. En posant $z = y^{1-\alpha}$, on se ramène à une équation linéaire $\frac{1}{1-\alpha} z'(t) = a(t)z(t) + b(t)$, que l'on sait résoudre.

2.2 Approximation numérique des solutions

On considère le problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0)$ donné, où $f \in \mathcal{C}^1([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ suffisamment régulière. On se donne une subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ de $[t_0, t_0 + T]$ et on cherche à construire y_0, \dots, y_N approximant $y(t_0), \dots, y(t_N)$ où y solution du problème de Cauchy. On pose $h_n = t_{n+1} - t_n$.

Définition 21. On appelle schéma à un pas toute suite de la forme $y_0 = y(t_0), y_{n+1} = y_n + \Phi(t_n, y_n, h_n)$.

Exemple 22. Le schéma d'Euler explicite consiste à prendre $\Phi(t, y, h) = hf(t, y)$, soit $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$.

Définition 23. On définit l'erreur de consistance $e_n = |y(t_n) - y_n|$.

Le schéma est dit consistant si $\sum_{n=0}^N |e_n| \xrightarrow{\max(h_n) \rightarrow 0} 0$. Il est dit stable s'il existe $C \geq 0$

tel que pour toutes suites $(y_n)_n, (z_n)_n$ définies par $y_{n+1} = y_n + \Phi(t_n, y_n, h_n)$, $z_{n+1} = z_n + \Phi(t_n, z_n, h_n) + \delta_n$, on ait $\max \|z_n - y_n\| \leq C \left(|z_0 - y_0| + \sum_{j=0}^{N-1} |\delta_j| \right)$. Il

est dit convergent si $\max |y_n - y(t_n)| \xrightarrow{\max h_n \rightarrow 0} 0$.

Théorème 24 (Lax). Si le schéma est consistant et stable, alors il est convergent.

Exemple 25. Le schéma d'Euler est convergent.

3 Étude qualitative des systèmes autonomes

3.1 Stabilité

On considère un système autonome $X' = f(X)$.

Définition 26. On appelle équilibre du système tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) = 0$.

Définition 27. Un équilibre x_0 est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si x solution vérifiant $|x(0) - x_0| < \delta$, alors pour tout $t \geq 0, x(t)$ est définie et vérifie $|x(t) - x_0| < \varepsilon$. Il est dit asymptotiquement stable s'il existe $\delta > 0$ tel que si x solution vérifiant $|x(0) - x_0| < \delta$, alors x définie sur $[0, +\infty[$ et $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} x_0$.

Proposition 28. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres complexes. L'équilibre 0 de $Y' = AY$ est :

— Asymptotiquement stable ssi $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \Re(\lambda_j) < 0$.

— Stable ssi $\forall j, \Re(\lambda_j) < 0$ ou $\Re(\lambda_j) = 0$ et la matrice induite sur le sous-espace propre est diagonalisable.

Théorème 29 (Lyapunov). Supposons que f soit \mathcal{C}^1 et que 0 soit un équilibre. Si les valeurs propres de $df(0)$ sont à partie réelle strictement négative, alors 0 est asymptotiquement stable.

Contre-exemple 30. On considère le système $\begin{cases} x' = \alpha x^3 \\ y' = \beta y^3 \end{cases}$. $(0, 0)$ est un équilibre où la jacobienne est nulle. Il est asymptotiquement stable si $\alpha, \beta < 0$ et instable si $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$.

3.2 Système de Lotka-Volterra

On considère le problème $\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}, x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0$.

Proposition 31. La solution maximale (x, y) est à valeurs strictement positives pour tout $t \geq 0$.

Proposition 32. $H : t \mapsto dx(t) + by(t) - c \ln(x(t)) - a \ln(y(t))$ est constante.

Corollaire 33. La solution maximale est définie sur \mathbb{R} entier.

Proposition 34. x et y sont périodiques.

4 Applications

4.1 Méthode des caractéristiques

On considère l'équation de transport $\partial_t u + c(t, x) \partial_x u = 0$ pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ d'inconnue $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, avec la condition initiale $\forall x \in \mathbb{R}, u(0, x) = u_0(x), u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Définition 35. On appelle caractéristique issue de $\xi \in \mathbb{R}$ toute solution du problème de Cauchy $x'(t) = c(t, x(t)), x(0) = \xi$.

Proposition 36. Si $x(t)$ caractéristique issue de ξ , et si u solution de l'équation de transport, alors $t \mapsto u(t, x(t))$ est constante.

Exemple 37. Si c est constante, une solution est donnée par $u(t, x) = u_0(x - ct)$. Si $c(t, x) = \frac{x}{t^2 + 1}$, une solution est donnée par $u(t, x) = u_0(x \exp(-\arctan(t)))$.

4.2 Théorème de Hadamard-Lévy

Définition 38. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite propre si pour tout K compact de \mathbb{R}^n , $f^{-1}(K)$ est compact.

Théorème 39 (Hadamard-Lévy). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. C'est un difféomorphisme, si et seulement si, f est propre et df est partout inversible.

Exemple 40. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - \arctan(y), y - \arctan(x)/2)$ est un difféomorphisme global.

Développements

- Théorème de Cauchy-Lipschitz global.
- Théorème de Hadamard-Lévy.

Références

- [1] J.-P. Demailly, ANALYSE NUMÉRIQUE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, EDP Sciences.
- [2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS ANALYSE 4, Cassini.
- [3] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [4] C. Zuily, H. Queffélec, ANALYSE POUR L'AGRÉGATION, Dunod.