

218. Applications des formules de Taylor.

Introduction : Les formules de Taylor donnent une approximation d'une fonction régulière par un polynôme au voisinage d'un point. On peut en tirer des informations locales, mais aussi globales, sur la fonction.

1 Fonctions d'une variable réelle

Soit I intervalle ouvert de \mathbb{R} , soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^d)$.

1.1 Rappel des formules de Taylor

Soit $a \in I$ tel que f soit n fois dérivable en a . On définit le polynôme de Taylor d'ordre n de f en a : $T_a^n(f) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$. Alors :

Théorème 1 (Taylor-Young). $\forall x \in I, f(x) = T_a^n(f)(x) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$.

Théorème 2 (reste intégral). $\forall x \in I$, si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, x])$, on a

$$f(x) = T_a^n(f)(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Théorème 3 (Taylor-Lagrange). $\forall x \in I$, si $f \in \mathcal{C}^n([a, x], \mathbb{R})$, $n+1$ fois dérivables sur $]a, x[$, alors il existe $c \in]a, x[$ tel que $f(x) = T_a^n(f)(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$.

Corollaire 4. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, x], \mathbb{R})$, on a

$$|f(x) - f(a) - T_a^n(f)(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

1.2 Développements limités

Proposition 5. Soit $a \in I$. Si f est n fois dérivable en a , alors f admet un développement limité à l'ordre n en a , donné par la formule de Taylor-Young.

Exemple 6. Pour $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0 :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

Application 7. $\frac{xe^x - \sin(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Application 8 (Théorème central limite). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid dans L^2 . Alors, si on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $\sqrt{\frac{n}{\text{Var}(X_1)}} \left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1] \right)$ converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Proposition 9. Si f dérivable en a et f' a un développement limité d'ordre n en a , alors f a un développement limité d'ordre $n+1$ en a obtenu en intégrant terme à terme, et avec $T_a^0(f) = f(a)$.

Exemple 10. Pour $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0, on a

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \arctan(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

1.3 Développements en série entière

Proposition 11. Si f est DSE en a , de rayon de convergence $r > 0$, alors pour tout $x \in]a-r, a+r[$, les n premiers termes du développement de $f(x)$ au voisinage de a sont les mêmes que ceux de $T_a^n(f)(x)$.

Proposition 12. On a alors, pour tout $x \in]a-r, a+r[$, $f(x) - T_a^n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Contre-exemple 13. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, alors f est \mathcal{C}^∞ , mais sa série de Taylor est nulle, donc f pas DSE en 0.

Théorème 14 (Bernstein). Si $a > 0$, $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a, a[, \mathbb{R})$ telle que pour tous $x \in]-a, a[$, $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k)}(x) \geq 0$, alors f est DSE sur $] -a, a[$.

Application 15. \tan est DSE sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2 Fonctions de plusieurs variables

2.1 Rappel des formules de Taylor

Soit U ouvert de \mathbb{R}^p , $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^d)$, n fois différentiable en $a \in U$. Son polynôme de Taylor est alors défini par $T_a^n(f)(h) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{D^k f(a)(h)^k}{k!}$.

Théorème 16 (Taylor-Young). Pour tout $h \in -a + U$, $f(a+h) = T_a^n(f)(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^n)$.

Théorème 17 (Reste intégral). Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(U, \mathbb{R}^d)$, si $[a, a+h] \subset U$, on a

$$f(a+h) = T_a^n(f)(h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^n f(a+th)(h)^{n+1} dt.$$

Théorème 18 (Taylor-Lagrange). Si $K \subset U$ convexe compact, alors il existe $C \geq 0$, telle que si $a, a+h \in K$, alors $\|f(a+h) - T_a^n(f)(h)\| \leq C\|h\|^{n+1}$.

2.2 Premières applications

Théorème 19 (Hadamard). Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Alors il existe $g_1, \dots, g_p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $f(x) = \sum_{i=1}^p x_i g_i(x)$. Si de plus $df(0) = 0$, alors il existe $(h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $f(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j h_{i,j}(x)$.

Théorème 20 (Morse). Soit U ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0, soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^3 . On suppose $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ forme quadratique non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ entre deux voisinages U, V de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(0) = 0$ et $\forall x \in U$,
 $f(x) = f(0) + \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$.

2.3 Extrema des fonctions de plusieurs variables

Théorème 21. Soit U ouvert de \mathbb{R}^p , soit $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$, soit $a \in U$.
 — Si f a un extremum local en a et si $df(a)$ existe, alors $df(a) = 0$.
 — Si f a un minimum local en a et si $d^2f(a)$ existe, alors $d^2f(a)$ est positive.
 — Si $df(a) = 0$ et $d^2f(a)$ définie positive, alors f a un minimum local en a .

Application 22. Soient U ouvert de \mathbb{R}^2 , $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$, $a \in U$ point critique de f tel que f deux fois différentiable en a . On note $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ la hessienne de f en a . Alors :

- Si $rt - s^2 > 0$, alors f a un extremum local strict en a (minimum si $r > 0$ ou $t > 0$).
- Si $rt - s^2 < 0$, alors f n'a pas d'extremum local en a (point col).

Exemple 23. Si $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x^2 - y^2 + \frac{1}{4}y^4 \end{cases}$, f admet un point col en $(0, 0)$ et deux minima locaux en $(0, -\sqrt{2})$ et $(0, \sqrt{2})$.

3 Applications en géométrie différentielle

3.1 Étude locale des courbes

Théorème 24. Soient I intervalle de \mathbb{R} , $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^2)$, $t \in \overset{\circ}{I}$. On suppose que $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*, \gamma^{(k)}(t) \neq 0\}$ et $q = \min\{k \in \mathbb{N}^*, \det(\gamma^{(p)}(t), \gamma^{(k)}(t)) \neq 0\}$ existent. Alors l'aspect local de γ au voisinage de t ne dépend que de la parité de p, q .

3.2 Étude locale des surfaces

Théorème 25. Soit U ouvert de \mathbb{R}^2 , soit $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$, soit $a \in U$. On suppose $d^2f(a)$ non dégénérée. Soit S la surface paramétrée par $z = f(x, y)$.

- Si $d^2f(a)$ définie positive, alors S est strictement au-dessus de son plan tangent au voisinage de a , sauf en $(a, f(a))$.
- Si $d^2f(a)$ définie négative, alors S est strictement en-dessous de son plan tangent au voisinage de a , sauf en $(a, f(a))$.
- Sinon, S traverse son plan tangent en a .

4 Applications en analyse numérique

4.1 Méthode de Newton

Théorème 26 (Cas réel). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$. On se donne $x_0 \in I$, et on pose $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. S'il existe $\delta > 0$ tel que f soit de classe \mathcal{C}^2 sur $] \alpha - \delta, \alpha + \delta [$ et si f' ne s'annule pas sur cet intervalle, alors pour tout $x_0 \in] \alpha - \delta, \alpha + \delta [$, la suite converge quadratiquement vers α .

Exemple 27. Si $\alpha > 0$, la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\alpha}{u_n})$ converge vers $\sqrt{\alpha}$.

Contre-exemple 28. La fonction $f(x) = \arctan(x)$ montre qu'il n'y a pas convergence globale en général.

Théorème 29. Soit $P(x) = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}$ fonction polynomiale réelle, avec $a_1 < \dots < a_r$ et $\forall i, m_i \geq 1$.

Pour tout $x_0 > a_r$, la suite de Newton $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers a_r , et :

- Si $m_r = 1$, alors $\forall \varepsilon > 0, |x_n - a_r| = o(\varepsilon^n)$.
- Si $m_r \geq 2$, alors $\exists c > 0, |x_n - a_r| \sim c \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$.

Proposition 30 (Cas vectoriel). Soit Ω ouvert de \mathbb{R}^n , soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, telle qu'il existe $\alpha \in \Omega$ avec $f(\alpha) = 0$. On suppose que f vérifie $Jf(\alpha) \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(\alpha, \delta)$, la suite définie par $x_{k+1} = x_k - Jf(x_k)^{-1}f(x_k)$ soit bien définie et converge vers α avec un ordre 2.

4.2 Résolution d'EDP par différences finies

Exemple 31. On considère le problème d'évolution $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 1[$, $u(0, x) = u_0(x)$ pour $x \in [0, 1]$. Alors le schéma d'Euler explicite, donné par $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n + 2u_j^n - u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$ est consistant, d'ordre 1 en t et d'ordre 2 en x .

Développements

- Théorème central limite.
- Lemme de Morse.
- Méthode de Newton pour les polynômes.

Références

- [1] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [2] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.
- [3] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES - TOME 2, Masson.
- [4] F. Rouvière, PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, Cassini.