

## 215. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.

**Introduction :** La différentielle généralise la notion de dérivée pour les applications d'une variable. L'idée est d'approcher une application  $f$  par une application linéaire, et de tirer des propriétés de cette dernière des informations sur  $f$ .

### 1 Applications différentiables

#### 1.1 Différentielle d'une application

Soient  $E, F$  espaces vectoriels normés de dimension finie, soit  $U$  ouvert de  $E$ . On munira  $\mathcal{L}(E, F)$  de la norme subordonnée.

**Définition 1.** Soit  $f : U \rightarrow F$ , soit  $a \in U$ . On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire  $L$  telle que  $\frac{1}{\|h\|_E}(f(a+h) - f(a) - L(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ . L'application  $L$  est alors unique, on dit que c'est la différentielle de  $f$  en  $a$ , et on note  $L = df(a)$ .

**Définition 2.**  $f$  est dite différentiable sur  $U$  si elle est différentiable en tout point de  $U$ . On définit alors l'application différentielle  $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ ,  $a \mapsto df(a)$ . Si  $E = \mathbb{R}^n$ , on appelle jacobienne de  $f$  en  $a \in U$  et on note  $\text{Jac}(f)(a)$  la matrice de  $df(a)$  dans la base canonique. Si  $df$  est continue, on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exemple 3.** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable, alors elle est différentiable et sa différentielle est donnée par  $df(a)h = f'(a)h$ .

**Exemple 4.** L'application  $f : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = M^{-1}$  est différentiable, et sa différentielle est donnée par  $df(M) : H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$ .

**Proposition 5.** Si  $f$  différentiable en  $a$ , alors  $f$  continue en  $a$ .

**Théorème 6.** Soient  $E, F, G$  espaces vectoriels normés de dimension finie,  $U$  ouvert de  $E$ ,  $V$  ouvert de  $F$ ,  $f : U \rightarrow F$  telle que  $f(U) \subseteq V$ ,  $g : V \rightarrow G$ . Alors, si  $a \in U$ , tel que  $f$  différentiable en  $a$  et  $g$  différentiable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  différentiable en  $a$  et  $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$ .

**Corollaire 7.** Soit  $f : U \rightarrow F$  qui réalise une bijection de  $U$  sur  $F(U)$ , différentiable en  $a \in U$ , et telle que  $f^{-1}$  différentiable en  $f(a)$ . Alors  $df(a)$  est un isomorphisme et  $df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}$ .

**Exemple 8.** Si  $E = \mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire euclidien, et  $N : x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ,  $N$  est différentiable en tout  $x \neq 0$  et alors  $\forall h \in \mathbb{R}^n$ ,  $dN(x)h = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}$ .

**Théorème 9** (Inégalité des accroissements finis). Soit  $f$  différentiable sur  $U$ , soient  $a, b \in U$  tels que  $[a, b] \in U$ . On suppose qu'il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $z \in [a, b]$ ,  $\|f'(z)\| \leq M$ . Alors  $\|f(b) - f(a)\|_F \leq M\|b - a\|_E$ .

**Corollaire 10.** Si  $U$  est un ouvert connexe de  $E$ , et si  $df = 0$  sur  $U$ , alors  $f$  est constante sur  $U$ .

**Corollaire 11.** Si  $f$  différentiable sur  $U$  convexe, et vérifie  $\forall x \in U, \|df(x)\| \leq k$ , alors  $f$  est  $k$ -lipschitzienne.

**Application 12.** Le système d'équations  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin(x+y) \\ y = \frac{1}{2} \cos(x-y) \end{cases}$ , d'inconnues  $x, y \in \mathbb{R}$ , admet une unique solution.

On prendra désormais  $E = \mathbb{R}^n$  muni de la norme euclidienne.

**Proposition 13.** Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable, il existe alors une unique application  $\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que pour tous  $x \in U, h \in \mathbb{R}^n$ ,  $df(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle$ .

**Définition 14.** On l'appelle gradient de  $f$ .

#### 1.2 Dérivées partielles

**Définition 15.** Soit  $f : U \rightarrow F$ , soit  $a \in U$ , soit  $h \in E$ . On dit que  $f$  admet une dérivée directionnelle en  $a$  selon  $h$  si  $t \mapsto f(a+th)$  est dérivable en 0, et on note alors cette dérivée  $\frac{\partial f}{\partial h}(a)$ .

Il ne suffit pas d'avoir des dérivées directionnelles selon tout vecteur pour être différentiable.

**Contre-exemple 16.** La fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(0,0) = 0$  et  $\forall (x,y) \neq (0,0)$ ,  $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$  admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur en  $(0,0)$  mais n'est même pas continue en  $(0,0)$ .

**Définition 17.** Soit  $f : U \rightarrow F$ , soit  $(e_1, \dots, e_n)$  base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f$  possède des dérivées directionnelles selon  $e_1, \dots, e_n$ , on notera  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  la dérivée selon le vecteur  $e_i$ , et on l'appellera la  $i$ -ème dérivée partielle de  $f$ .

**Proposition 18.** Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable en  $a$ , on a  $\nabla f(a) = {}^t \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ .

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  différentiable en  $a$ , on a  $\text{Jac}(f)(a) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j}$ .

**Proposition 19.**  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , si et seulement si, toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur  $U$ .

**Proposition 20.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable, soit  $\bar{x} \in U$ . Alors, si  $f$  admet un extremum local en  $\bar{x}$ , on a  $df(\bar{x}) = 0$ .

**Définition 21.** On appellera points critiques de  $f$  les points où sa différentielle est nulle.

**Contre-exemple 22.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$  admet un point critique mais pas d'extremum en  $(0, 0)$ .

### 1.3 Différentielle d'ordre supérieur

Soit  $f : U \rightarrow F$  application de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Définition 23.** Si l'application  $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  est différentiable en  $a$ , on dit que  $f$  est deux fois différentiable en  $a$ . On notera  $d^2f(a)$  cette différentielle, et on l'identifiera à une application bilinéaire :  $d^2f(a)(h, k) = d^2f(a)(h)(k)$ . Si  $d^2f$  est continue, on dira que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ .

On définit de même la différentielle  $k$ -ème, que l'on identifie à une application  $k$ -linéaire. On notera  $d^k f(a)(h)^k = df^k(a)(h, \dots, h)$  avec  $(h, \dots, h) \in \mathbb{R}^k$ .

**Définition 24.** Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois différentiable en  $a \in U$ , on définit sa matrice hessienne en  $a$ ,  $Hf(a) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)$ .

**Théorème 25** (Schwarz). Si  $f$  est deux fois différentiable en  $a \in U$ , alors l'application bilinéaire  $d^2f(a)$  est symétrique.

**Contre-exemple 26.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ , 0 sinon.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  sont bien définies et valent respectivement 1 et  $-1$ .

**Théorème 27** (Taylor-Young). Soit  $f : U \rightarrow F$   $k$ -fois différentiable, soit  $a \in U$ . Alors, pour tout  $h \in E$  tel que  $a + h \in U$ , on a  $f(a + h) = f(a) + df(a)h + \dots + \frac{1}{k!}d^k f(a)(h)^k + o(\|h\|^k)$ .

**Proposition 28.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois différentiable, soit  $\bar{x} \in U$  un point critique de  $f$ . Alors, si  $\bar{x}$  est un minimum local,  $d^2f(\bar{x})$  est une forme bilinéaire positive. Réciproquement, si  $d^2f(\bar{x})$  est une forme quadratique définie positive, alors  $\bar{x}$  minimum local strict.

**Exemple 29.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$  admet deux extrema locaux en  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  et  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ , qui sont des minima.

**Exemple 30.** Pour  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$ , on considère  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ .  $J$  admet un unique minimum en  $x_0$  qui est la solution de  $Ax = b$ .

**Théorème 31** (Taylor reste intégral). Si  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U, F)$ ,  $a \in U, h \in E$  tel que  $[a, a + h] \subset U$ , alors

$$f(a + h) = f(a) + df(a)h + \dots + \frac{1}{k!}d^k f(a)(h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a + th)(h)^{k+1} dt.$$

## 2 Inversion locale et fonctions implicites

### 2.1 Difféomorphismes

**Définition 32.** Soient  $U, V$  ouverts respectifs de  $E, F$ . On dit que  $f : U \rightarrow V$  est un  $\mathcal{C}^k$  difféomorphisme si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , bijective et que  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Exemple 33.**  $f : t \mapsto \operatorname{argth}(t)$  réalise un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$ .

**Théorème 34** (Changement de variables). Soient  $U, V$  ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $\varphi : U \rightarrow V$  un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme, soit  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ . On a  $f \in L^1(V) \Leftrightarrow \det(d\varphi)f \circ \varphi \in L^1(U)$ , et alors  $\int_V f(x) dx = \int_U |\det(d\varphi(x))| f(\varphi(x)) dx$ .

**Exemple 35.**  $J : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[ , (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  définit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme, et  $|\det(dJ(r \cos(\theta), r \sin(\theta)))| = r$ .

**Application 36.**  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**Application 37.** Soient  $X_1, X_2$  variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Alors  $Y = X_1^2 + X_2^2$  suit une loi  $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$ .

### 2.2 Théorème d'inversion locale

**Théorème 38** (Inversion locale). Soit  $f : E \rightarrow F$  de classe  $\mathcal{C}^k$ , soit  $a \in E$  tel que  $df(a)$  soit inversible. Alors il existe  $U$  voisinage de  $a$  dans  $E$ , et  $V$  voisinage de  $f(a)$  dans  $F$ , tel que  $f$  réalise un  $\mathcal{C}^k$  difféomorphisme de  $a$  sur  $f(a)$ .

**Application 39.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $I_n$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que pour tout  $A \in \mathcal{V}$ , il existe  $B \in \mathcal{V}, A = B^k$ .

**Application 40** (Lemme de Morse). Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $0$ , soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^3$ . On suppose que  $df(0) = 0$  et  $d^2f(0)$  forme bilinéaire non dégénérée, de signature  $(p, n - p)$ . Alors il existe un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  entre  $U$  et un voisinage  $V$  de  $0$ , tel que  $\varphi(0) = 0$  et pour tout  $x \in U$ ,  $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^p \varphi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^n \varphi_i(x)^2$ .

**Théorème 41** (Hadamard-Lévy). Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Alors  $f$  est un difféomorphisme global, si et seulement si, elle est propre et sa différentielle est partout inversible.

**Exemple 42.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - \arctan(y), y - \arctan(x)/2)$  est un difféomorphisme global.

### 2.3 Théorème des fonctions implicites

**Théorème 43** (Fonctions implicites). Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ , soit  $(a, b) \in U$ , soit  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ . On suppose  $f(a, b) = 0$  et  $\det(d_y f(a, b)) \neq 0$ . Alors il existe  $V, W$  voisinages de  $a, b$  tels que  $V \times W \subseteq U$  et une unique application  $\varphi \in \mathcal{C}^1(V, W)$  telle que  $\{(x, y) \in V \times W, f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)), x \in V\}$ .

**Exemple 44.** Le cercle, d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  dans  $\mathbb{R}^2$ , s'exprime localement comme le graphe d'une fonction au voisinage de tout point sauf  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ .

**Remarque 45.** On a alors, pour  $x \in U$ ,  $d\varphi(x) = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$ .

**Exemple 46.** En tout point  $(a, b)$  tel que  $3(b^2 - a) \neq 0$ , le folium de Descartes d'équation  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$  s'exprime localement comme le graphe d'une fonction. En particulier, la tangente en  $(a, b)$  a pour équation  $(a^2 - b)(x - a) + (b^2 - a)(y - b) = 0$ .

**Théorème 47** (Extrema liés). Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , soient  $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ , soit  $\Gamma = \{x \in U, \forall 1 \leq i \leq r, g_i(x) = 0\}$ . Si  $f|_\Gamma$  possède un extremum relatif en  $a \in \Gamma$ , et si les formes linéaires  $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$  forment une famille libre, alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  tels  $df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_i(a)$ .

**Exemple 48.** Soient  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ .  $f$  admet un minimum et un maximum global respectivement en  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  et  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

**Application 49.**  $SO_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des éléments de  $SL_n(\mathbb{R})$  de norme minimale.

**Définition 50.** Les  $(\lambda_i)$  sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

## Développements

- Lemme de Morse.
- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Théorème des extrema liés.

## Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] P. Donato, CALCUL DIFFÉRENTIEL POUR LA LICENCE, Dunod.
- [3] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [4] B. Hauchecorne, LES CONTRE-EXEMPLES EN MATHÉMATIQUES, Ellipses.
- [5] F. Rouvière, PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, Cassini.