

215. Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.

Introduction : La différentielle généralise la notion de dérivée pour les applications d'une variable. L'idée est d'approcher une application f par une application linéaire, et de tirer des propriétés de cette dernière des informations sur f .

1 Applications différentiables

1.1 Différentielle d'une application

Soient E, F espaces vectoriels normés de dimension finie, soit U ouvert de E . On munira $\mathcal{L}(E, F)$ de la norme subordonnée.

Définition 1. Soit $f : U \rightarrow F$, soit $a \in U$. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire L telle que $\frac{1}{\|h\|_E}(f(a+h) - f(a) - L(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. L'application L est alors unique, on dit que c'est la différentielle de f en a , et on note $L = df(a)$.

Définition 2. f est dite différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U . On définit alors l'application différentielle $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$, $a \mapsto df(a)$. Si $E = \mathbb{R}^n$, on appelle jacobienne de f en $a \in U$ et on note $Jac(f)(a)$ la matrice de $df(a)$ dans la base canonique. Si df est continue, on dit que f est de classe \mathcal{C}^1 .

Exemple 3. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors elle est différentiable et sa différentielle est donnée par $df(a)h = f'(a)h$.

Exemple 4. L'application $f : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^{-1}$ est différentiable, et sa différentielle est donnée par $df(M) : H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$.

Proposition 5. Si f différentiable en a , alors f continue en a .

Théorème 6. Soient E, F, G espaces vectoriels normés de dimension finie, U ouvert de E , V ouvert de F , $f : U \rightarrow F$ telle que $f(U) \subseteq V$, $g : V \rightarrow G$. Alors, si $a \in U$, tel que f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ différentiable en a et $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

Corollaire 7. Soit $f : U \rightarrow F$ qui réalise une bijection de U sur $F(U)$, différentiable en $a \in U$, et telle que f^{-1} différentiable en $f(a)$. Alors $df(a)$ est un isomorphisme et $df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}$.

Exemple 8. Si $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien, et $N : x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, N est différentiable en tout $x \neq 0$ et alors $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $dN(x)h = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}$.

Théorème 9 (Inégalité des accroissements finis). Soit f différentiable sur U , soient $a, b \in U$ tels que $[a, b] \in U$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $z \in [a, b]$, $\|f'(z)\| \leq M$. Alors $\|f(b) - f(a)\|_F \leq M\|b - a\|_E$.

Corollaire 10. Si U est un ouvert connexe de E , et si $df = 0$ sur U , alors f est constante sur U .

Corollaire 11. Si f différentiable sur U convexe, et vérifie $\forall x \in U, \|df(x)\| \leq k$, alors f est k -lipschitzienne.

Application 12. Le système d'équations $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin(x+y) \\ y = \frac{1}{2} \cos(x-y) \end{cases}$, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$, admet une unique solution.

On prendra désormais $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne.

Proposition 13. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, il existe alors une unique application $\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour tous $x \in U, h \in \mathbb{R}^n$, $df(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle$.

Définition 14. On l'appelle gradient de f .

1.2 Dérivées partielles

Définition 15. Soit $f : U \rightarrow F$, soit $a \in U$, soit $h \in E$. On dit que f admet une dérivée directionnelle en a selon h si $t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0, et on note alors cette dérivée $\frac{\partial f}{\partial h}(a)$.

Il ne suffit pas d'avoir des dérivées directionnelles selon tout vecteur pour être différentiable.

Contre-exemple 16. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur en $(0,0)$ mais n'est même pas continue en $(0,0)$.

Définition 17. Soit $f : U \rightarrow F$, soit (e_1, \dots, e_n) base canonique de \mathbb{R}^n . Si f possède des dérivées directionnelles selon e_1, \dots, e_n , on notera $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée selon le vecteur e_i , et on l'appellera la i -ème dérivée partielle de f .

Proposition 18. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a , on a $\nabla f(a) = {}^t \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable en a , on a $Jac(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j}$.

Proposition 19. f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , si et seulement si, toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur U .

Proposition 20. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, soit $\bar{x} \in U$. Alors, si f admet un extremum local en \bar{x} , on a $df(\bar{x}) = 0$.

Définition 21. On appellera points critiques de f les points où sa différentielle est nulle.

Contre-exemple 22. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ admet un point critique mais pas d'extremum en $(0, 0)$.

1.3 Différentielle d'ordre supérieur

Soit $f : U \rightarrow F$ application de classe \mathcal{C}^1 .

Définition 23. Si l'application $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est différentiable en a , on dit que f est deux fois différentiable en a . On notera $d^2f(a)$ cette différentielle, et on l'identifiera à une application bilinéaire : $d^2f(a)(h, k) = d^2f(a)(h)(k)$. Si d^2f est continue, on dira que f est de classe \mathcal{C}^2 sur U .

On définit de même la différentielle k -ème, que l'on identifie à une application k -linéaire. On notera $d^k f(a)(h)^k = df^k(a)(h, \dots, h)$ avec $(h, \dots, h) \in \mathbb{R}^k$.

Définition 24. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable en $a \in U$, on définit sa matrice hessienne en a , $Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)$.

Théorème 25 (Schwarz). Si f est deux fois différentiable en $a \in U$, alors l'application bilinéaire $d^2f(a)$ est symétrique.

Contre-exemple 26. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, 0 sinon. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ sont bien définies et valent respectivement 1 et -1 .

Théorème 27 (Taylor-Young). Soit $f : U \rightarrow F$ k -fois différentiable, soit $a \in U$. Alors, pour tout $h \in E$ tel que $a + h \in U$, on a $f(a + h) = f(a) + df(a)h + \dots + \frac{1}{k!}d^k f(a)(h)^k + o(\|h\|^k)$.

Proposition 28. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable, soit $\bar{x} \in U$ un point critique de f . Alors, si \bar{x} est un minimum local, $d^2f(\bar{x})$ est une forme bilinéaire positive. Réciproquement, si $d^2f(\bar{x})$ est une forme quadratique définie positive, alors \bar{x} minimum local strict.

Exemple 29. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ admet deux extrema locaux en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, qui sont des minima.

Exemple 30. Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$, on considère $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$. J admet un unique minimum en x_0 qui est la solution de $Ax = b$.

Théorème 31 (Taylor reste intégral). Si $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U, F)$, $a \in U, h \in E$ tel que $[a, a + h] \subset U$, alors

$$f(a + h) = f(a) + df(a)h + \dots + \frac{1}{k!}d^k f(a)(h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a + th)(h)^{k+1} dt.$$

2 Inversion locale et fonctions implicites

2.1 Difféomorphismes

Définition 32. Soient U, V ouverts respectifs de E, F . On dit que $f : U \rightarrow V$ est un \mathcal{C}^k difféomorphisme si f est de classe \mathcal{C}^k , bijective et que f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k .

Exemple 33. $f : t \mapsto \operatorname{argth}(t)$ réalise un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$.

Théorème 34 (Changement de variables). Soient U, V ouverts de \mathbb{R}^n , soit $\varphi : U \rightarrow V$ un \mathcal{C}^1 difféomorphisme, soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. On a $f \in L^1(V) \Leftrightarrow \det(d\varphi)f \circ \varphi \in L^1(U)$, et alors $\int_V f(x)dx = \int_U |\det(d\varphi(x))|f(\varphi(x))dx$.

Exemple 35. $J : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[, (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ définit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, et $|\det(dJ(r \cos(\theta), r \sin(\theta)))| = r$.

Application 36. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Application 37. Soient X_1, X_2 variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors $Y = X_1^2 + X_2^2$ suit une loi $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$.

2.2 Théorème d'inversion locale

Théorème 38 (Inversion locale). Soit $f : E \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^k , soit $a \in E$ tel que $df(a)$ soit inversible. Alors il existe U voisinage de a dans E , et V voisinage de $f(a)$ dans F , tel que f réalise un \mathcal{C}^k difféomorphisme de a sur $f(a)$.

Application 39. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un voisinage \mathcal{V} de I_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout $A \in \mathcal{V}$, il existe $B \in \mathcal{V}, A = B^k$.

Application 40 (Lemme de Morse). Soit U ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0 , soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^3 . On suppose que $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ forme bilinéaire non dégénérée, de signature $(p, n - p)$. Alors il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ entre U et un voisinage V de 0 , tel que $\varphi(0) = 0$ et pour tout $x \in U$, $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^p \varphi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^n \varphi_i(x)^2$.

Théorème 41 (Hadamard-Lévy). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Alors f est un difféomorphisme global, si et seulement si, elle est propre et sa différentielle est partout inversible.

Exemple 42. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - \arctan(y), y - \arctan(x)/2)$ est un difféomorphisme global.

2.3 Théorème des fonctions implicites

Théorème 43 (Fonctions implicites). Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, soit $(a, b) \in U$, soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$. On suppose $f(a, b) = 0$ et $\det(d_y f(a, b)) \neq 0$. Alors il existe V, W voisinages de a, b tels que $V \times W \subseteq U$ et une unique application $\varphi \in \mathcal{C}^1(V, W)$ telle que $\{(x, y) \in V \times W, f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)), x \in V\}$.

Exemple 44. Le cercle, d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans \mathbb{R}^2 , s'exprime localement comme le graphe d'une fonction au voisinage de tout point sauf $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

Remarque 45. On a alors, pour $x \in U$, $d\varphi(x) = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$.

Exemple 46. En tout point (a, b) tel que $3(b^2 - a) \neq 0$, le folium de Descartes d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ s'exprime localement comme le graphe d'une fonction. En particulier, la tangente en (a, b) a pour équation $(a^2 - b)(x - a) + (b^2 - a)(y - b) = 0$.

Théorème 47 (Extrema liés). Soit U ouvert de \mathbb{R}^n , soient $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, soit $\Gamma = \{x \in U, \forall 1 \leq i \leq r, g_i(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ possède un extremum relatif en $a \in \Gamma$, et si les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ forment une famille libre, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels $df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_i(a)$.

Exemple 48. Soient $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$. f admet un minimum et un maximum global respectivement en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Application 49. $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Définition 50. Les (λ_i) sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Développements

- Lemme de Morse.
- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Théorème des extrema liés.

Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] P. Donato, CALCUL DIFFÉRENTIEL POUR LA LICENCE, Dunod.
- [3] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [4] B. Hauchecorne, LES CONTRE-EXEMPLES EN MATHÉMATIQUES, Ellipses.
- [5] F. Rouvière, PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, Cassini.