

214. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

Introduction : En dimension 1, on voit en approchant localement le graphe d'une fonction dérivable par sa tangente que si la dérivée est non nulle, la fonction est localement injective. Que se passe-t-il en dimension supérieure ?

1 Inversion locale et fonctions implicites

1.1 Le théorème d'inversion locale et ses variantes

Définition 1. Soient E, F deux espaces normés, soient U ouvert de E , V ouvert de F , soit $f : U \rightarrow V$. On dit que f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme si f est de classe \mathcal{C}^k , bijective et si f^{-1} de classe \mathcal{C}^k .

Théorème 2 (Inversion locale). Soient Ω ouvert de \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 . Soit $a \in U$ tel que $df(a)$ soit inversible. Alors il existe U voisinage de a dans Ω , V voisinage de $f(a)$ dans \mathbb{R}^n , tel que f réalise un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur $V = f(U)$.

Remarque 3. Si f est de classe \mathcal{C}^k , elle réalise alors un \mathcal{C}^k -difféomorphisme.

Exemple 4. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ réalise un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, mais pas un difféomorphisme global.

Théorème 5 (Inversion globale). Soit $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ injective, telle que pour tout $x \in \Omega$, $df(x)$ inversible. Alors $f(\Omega)$ ouvert de \mathbb{R}^n et f réalise un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$.

Théorème 6 (Inversion globale holomorphe). Soit Ω ouvert connexe de \mathbb{C} , soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe injective. Alors $f(\Omega)$ ouvert de \mathbb{C} et f est un difféomorphisme holomorphe de Ω sur $f(\Omega)$.

Définition 7. Soient E, F evn. On dit que $f : E \rightarrow F$ est propre si $\forall K$ compact de F , $f^{-1}(K)$ compact de E .

Proposition 8. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est propre ssi $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$.

Théorème 9 (Hadamard-Lévy). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. C'est un difféomorphisme ssi elle est propre et sa différentielle est partout inversible.

Exemple 10. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - \arctan(y), y - \arctan(x)/2)$ est un difféomorphisme global.

1.2 Premières applications en calcul différentiel

Lemme 11. Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe V voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\psi : V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\forall A \in V, A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$.

Théorème 12 (Morse). Soit U ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0, soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^3 . On suppose $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ forme quadratique non dégénérée, de signature $(p, n - p)$. Alors il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ entre deux voisinages U, V de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(0) = 0$ et $\forall x \in U, f(x) = f(0) + \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$.

Application 13. Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ définie positive. Alors 0 minimum local strict de f .

Théorème 14 (Rang constant). Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$. Soit $a \in \Omega$ tel que pour tout x dans un voisinage de a , le rang de $df(x)$ est constant égal à r . Alors il existe U voisinage de a , V voisinage de $f(a)$, U', V' ouverts respectifs de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$, et $\phi : U' \rightarrow U, \psi : V \rightarrow V'$ des \mathcal{C}^1 -difféomorphismes tels que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in U, \psi \circ f \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.

1.3 Théorème des fonctions implicites

Théorème 15. Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$, soit $(a, b) \in \Omega$ tel que $f(a, b) = 0$ et $d_y f(a, b)$ inversible. Alors il existe U voisinage de a , V voisinage de b tels que $U \times V \subseteq \Omega$, et $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, V)$ tels que $\forall (x, y) \in U \times V, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$.

Exemple 16. Le cercle, d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans \mathbb{R}^2 , s'exprime localement comme le graphe d'une fonction au voisinage de tout point sauf $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

Remarque 17. On a alors, pour $x \in U, d\varphi(x) = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$.

Exemple 18. En tout point (a, b) tel que $3(b^2 - a) \neq 0$, le folium de Descartes d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ s'exprime localement comme le graphe d'une fonction. En particulier, la tangente en (a, b) a pour équation $(a^2 - b)(x - a) + (b^2 - a)(y - b) = 0$.

2 Applications

2.1 Optimisation sous contraintes

Théorème 19. Soit U ouvert de \mathbb{R}^n , soient $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, soit $\Gamma = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ possède un extremum relatif en $a \in \Gamma$, et si les formes linéaires $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ forment une famille libre, alors il existe

$\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_i(a)$.

Application 20. $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Définition 21. Les (λ_i) sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

2.2 Algèbre linéaire

Théorème 22. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un voisinage U de I_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in U$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = B^k$.

Lemme 23. \exp réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Application 24. Il existe un voisinage V de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ tel que le seul sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ contenu dans V soit $\{I_n\}$.

2.3 Équation de Burgers

Soient $a, u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'EDP de Burgers $\partial_t u + u \partial_x u = 0$ où $u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec la condition initiale $\forall x \in \mathbb{R}, u(0, x) = u_0(x)$.

Définition 25. On appelle caractéristique issue de $\xi \in \mathbb{R}$ la solution maximale du problème de Cauchy $x'(t) = u(x(t), t)$ avec condition initiale $x(0) = \xi$.

Celles-ci sont de la forme $x(t) = u_0(\xi)t + \xi$. On pose $F(x, t, \xi) = u_0(\xi)t + \xi - x$.

Proposition 26. Si $\partial_\xi F(x, t, \xi) \neq 0$, alors il existe une unique fonction $\xi(x, t)$ telle que $F(x, t, \xi(x, t)) = 0$. En particulier, si u_0 est de classe \mathcal{C}^1 et croissante sur \mathbb{R} , alors l'équation de Burgers admet une solution définie sur \mathbb{R}_+ .

3 Sous-variétés de \mathbb{R}^n

3.1 Immersions et submersions

Définition 27. Soit U ouvert de \mathbb{R}^p , soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. Si $p \leq q$ et df partout injective, f est appelée une immersion. Si $p \geq q$ et df est partout surjective, f est appelée une submersion.

Remarque 28. Si une application est à la fois une immersion et une submersion, c'est un difféomorphisme local.

Théorème 29 (des immersions). Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^q)$, on suppose $0 \in U$ et $df(0)$ injective. Alors il existe V ouvert de \mathbb{R}^q contenant $f(0)$, et U' voisinage ouvert de 0 dans U tel que $f(U') \subseteq V$, et φ difféomorphisme de V sur $\varphi(V)$ tel que $\forall (x_1, \dots, x_p) \in U, \varphi(f(x_1, \dots, x_p)) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$.

Théorème 30 (des submersions). On suppose cette fois que $df(0)$ surjective. Alors il existe W ouvert de \mathbb{R}^p contenant 0, et ψ difféomorphisme de W sur $\psi(W)$ tel que $\psi(W) \subseteq U$ et $\forall (x_1, \dots, x_p) \in W, f(\psi(x_1, \dots, x_p)) = (x_1, \dots, x_p)$.

3.2 Définitions des sous-variétés

Définition 31. Une partie V de \mathbb{R}^n est appelée sous-variété de dimension $d \in \mathbb{N}$ si pour tout $x \in V$, il existe U voisinage de x dans \mathbb{R}^n , W voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n , et $f : U \rightarrow W$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, tel que $F(U \cap V) = W \cap (\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\})$.

Théorème 32. Soit V partie de \mathbb{R}^n . On a équivalence entre :

- (i). V est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension d .
- (ii). Pour tout $a \in V$, il existe U voisinage ouvert de a dans \mathbb{R}^n et $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ submersion tel que $U \cap V = g^{-1}(\{0\})$.
- (iii). Pour tout $a \in V$, il existe U voisinage ouvert de a dans \mathbb{R}^n , Ω voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^d , et $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est une immersion dans \mathbb{R}^n et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap V$.
- (iv). Pour tout $a \in V$, il existe U voisinage ouvert de a dans \mathbb{R}^n , V voisinage de (a_1, \dots, a_d) dans \mathbb{R}^d et $G \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$ tel qu'après permutation éventuelle des coordonnées, $U \cap V$ soit égal au graphe de G .

3.3 Exemples

Exemple 33. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$ est une submersion. On en déduit que la sphère $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$ est une sous-variété de dimension $n - 1$ de \mathbb{R}^n .

Exemple 34. Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans \mathbb{R}^2 est une sous-variété de dimension 1, qui admet $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ comme paramétrage.

Exemple 35. $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R}), M \mapsto {}^t M M - I_n$ est une submersion. $O_n(\mathbb{R})$ est donc une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Contre-exemple 36. Le cône d'équation $x^2 + y^2 - z^2$ dans \mathbb{R}^3 n'est pas une sous-variété : en effet le critère (iii). tombe en défaut au voisinage de 0.

Développements

- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Lemme de Morse.
- Théorème des extrema liés.

Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] L. Di Menza, ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, Cassini.
- [3] P. Donato, CALCUL DIFFÉRENTIEL POUR LA LICENCE, Dunod.
- [4] J. Lafontaine, INTRODUCTION AUX VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES, EDP Sciences.
- [5] R. Mneimné, F. Testard, INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GROUPES DE LIE CLASSIQUES, Hermann.
- [6] F. Rouvière, PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, Cassini.